A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 3-6 martie, 2017

Clasa a X-*a*, ziua întâi

SOLUŢIILE PROBLEMELOR

Problema 10.1. Fie polinomul $P(X)=aX^2+bX+c$, unde $a,b,c\in R$, $a\neq 0$ şi x_1, x_2 rădăcinile acestui polinom. Să se arate că dacă a se află între c şi $b-c$, atunci în intervalul $(-1,1)$ se poate conţine cel mult una dintre aceste rădăcini.

Rezolvare. Presupunem contrariul: fie că polinomul are ambele rădăcini $x_1, x_2\in(-1,1)$. Atunci $|x_1|<1$ şi $|x_2|<1$, de unde $|x_1x_2|<1$, adică $-1<x_1x_2<1$. Avem sistemul: $\begin{cases}1-x_1x_2>0,\\ 1+x_1>0,\\ 1+x_2>0.\end{cases}$ Prin urmare,

$$(1-x_1x_2)(1+x_1)(1+x_2)>0 \Leftrightarrow (1-x_1x_2)[1+(x_1+x_2)+x_1x_2]>0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-c)[a-(b-c)]>0.$$

Această ultimă inegalitate contrazice faptul că a se află între c şi $b-c$. Afirmaţia este demonstrată.

Problema 10.2. Se consideră funcţia strict monotonă $f:R\to R$. Să se determine toate funcţiile $g:R\to R$, astfel încât

$$f(g(x+2017))\geq f(x)\geq f(g(x)+2017),\ (\forall)x\in R.$$

Rezolvare. Considerăm funcţia f strict crescătoare. Din condiţiile problemei rezultă

$$\begin{cases}g(x+2017)\geq x,\\ x\geq g(x)+2017,\end{cases} \text{ adică } \begin{cases}x\leq g(x+2017),\\ x\geq g(x)+2017.\end{cases}$$

În prima inegalitate substituim x prin $x-2017$ şi obţinem:

$$\begin{cases}x-2017\leq g(x),\\ x\geq g(x)+2017,\end{cases} \text{ adică } \begin{cases}g(x)\geq x-2017,\\ g(x)\leq x-2017.\end{cases}$$

Astfel, $g(x)=x-2017$ pentru oricare $x\in R$.

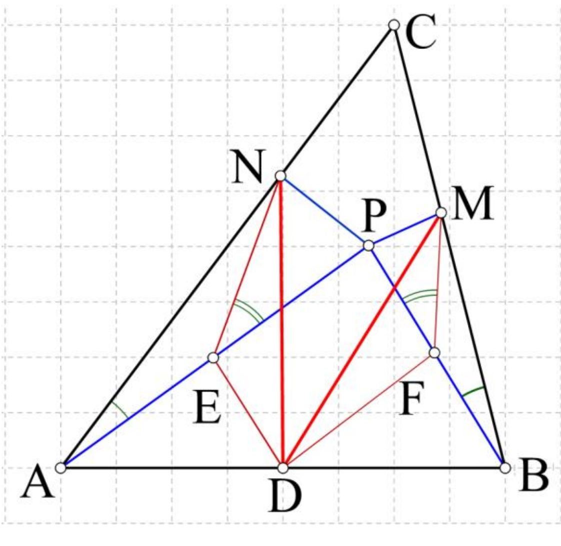
Verificăm soluţia:

$$f(g(x+2017))=f(x+2017-2017)=f(x);\ \ f(g(x)+2017)=f(x-2017+2017)=f(x).$$

Inegalităţile din enunţ sunt satisfăcute, ele devin chiar egalităţi.

Cazul funcţiei strict descrescătoare este absolut identic.

Problema 10.3. Fie P un punct, situat în interiorul unui triunghi ABC, astfel încât $\angle CAP\equiv\angle CBP$. Fie D mijlocul laturii AB, iar M şi N proiecţiile punctului P pe laturile BC şi AC, respectiv. Să se demonstreze că $DM=DN$.



Rezolvare. Fie E şi F mijloacele segmentelor AP şi BP, respectiv. Întrucât DE şi DF sunt linii mijlocii ale triunghiului ABP, atunci $DEPF$ este paralelogram, iar FM şi EN sunt mediane corespunzătoare ipotenuzelor triunghiurilor dreptunghice BPM şi APN, respectiv.

Au loc egalităţile:

1. $DE=PF=MF$;
2. $DF=PE=NE$;
3. $m(\angle DEP)=m(\angle DFP)$.

Punctele E şi F, fiind centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor dreptunghice APN şi BPM, respectiv şi întrucât $\angle CAP\equiv\angle CBP$, atunci au loc egalităţile:

4. $m(\angle NEP)=2\cdot m(\angle CAP)=2\cdot m(\angle CBP)=m(\angle MFP)$.

Din 3. şi 4. rezultă că:

5. $m(\angle DEN)=m(\angle MFD)$.

Din 1., 5. şi 2. (LUL), rezultă că $\Delta DFM\equiv\Delta NED$, atunci $DM=DN$.

Afirmaţia este demonstrată.

Problema 10.4. Să se determine toate numere naturale nenule *n*, pentru care numărul

$$S_n=1\cdot C_{2n}^1+2\cdot C_{2n}^2+3\cdot C_{2n}^3+...+n\cdot C_{2n}^n$$

este un pătrat perfect mai mic decât 1 000 000.

Rezolvare. Transformăm termenul general al sumei

$$a_k=k\cdot C_{2n}^k=k\cdot\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}=\frac{(2n)!}{(k-1)!(2n-k)!}=2n\cdot\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(2n-k)!}=2n\cdot C_{2n-1}^{k-1}.$$

Suma S_n ia forma:

$$S_n=2n\left(C_{2n-1}^0+C_{2n-1}^1+C_{2n-1}^2+...+C_{2n-1}^{n-1}\right).$$

Suma din paranteze conţine *n* termeni – exact prima jumătate din suma tuturor coeficienţilor binomiali. Cum coeficienţii binomiali, egal depărtaţi de termenii extremi ai dezvoltării, sunt egali, suma din paranteze este egală cu 2^{2n-2} şi atunci $S_n=2n\cdot 2^{2n-2}$, adică $S_n=n\cdot 2^{2n-1}$.

Cum $S_n\le 1\,000\,000$, rezultă că $n\in\{1,2,3,...,9\}$. Pătrate perfecte se obţin doar pentru $n=2$ ($S_2=16$) şi pentru $n=8$ (cu $S_8=2^{18}=262\,144$).

BAREM DE CORECTARE

Notă: *Orice altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctaj maxim.*

Problema 10.1.

1. Se presupune că $x_1,x_2\in(-1;1)$ şi se scriu relaţiile $|x_1|<1$, $|x_2|<1$, $|x_1\cdot x_2|<1$..................................1p.

2. Se scrie sistemul

$$\begin{cases}1-x_1x_2>0,\\1+x_1>0,\\1+x_2>0.\end{cases}$$ ....2p.

3. Se obţine inegalitatea $(1-x_1x_2)(1+x_1)(1+x_2)>0$ ....1p.

4. Se obţine inegalitatea $(a-c)(a-(b-c))>0$ ....2p.

5. Concluzie finală ....1p.

Problema 10.2.

1. Din monotonie rezultă

$$\begin{cases}g(x+2017)\ge x,\\x\ge g(x)+2017.\end{cases}$$ ....2p.

2. Se substituie *x* prin $x-2017$ şi se obţine sistemul

$$\begin{cases}g(x)\ge x-2017,\\g(x)\le x-2017.\end{cases}$$ ....2p.

3. Se află $g(x) = x - 2017$
....1p.
4. Se verifică soluţia
....2p.

Problema 10.3.
1. Se realizează desenul corect şi se depun punctele *E* şi *F* – mijloacele segmentelor *AP* şi *BP*...……..……1p.
2. Se argumentează că $DEPF$ este paralelogram
....1p.
3. Se argumentează egalităţile $DE = MF$ şi $DF = NE$ ....2p.
4. Se argumentează egalitatea $m(\angle NEP) = m(\angle MFP)$..1p.
5. Se obţine egalitatea $m(\angle DEN) = m(\angle MFD)$
....1p.
6. Concluzie: $\Delta DFM \equiv \Delta NED \Rightarrow DM = DN$
....1p.

Problema 10.4.
1. Se obţine termenul general al sumei $a_k = 2n \cdot C_{2n-1}^{k-1}$ ……………………………………………..…2p.
2. Se află $S_n = n \cdot 2^{2n-1}$
....3p.
3. Se obţine $n \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$
....1p.
4. Se determină valorile $n = 2$ (cu $S_2 = 16$) şi $n = 8$ (cu $S_8 = 2^{18}$)...1p.