A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 3-6 martie, 2017

Clasa a X-*a*, ziua întâi

Problema 10.1. Fie polinomul $P(X)=aX^2+bX+c$, unde $a,b,c\in R$, $a\neq 0$ şi x_1, x_2 rădăcinile acestui polinom. Să se arate că dacă a se află între c şi $b-c$, atunci în intervalul $(-1,1)$ se poate conţine cel mult una dintre aceste rădăcini.

Problema 10.2. Se consideră funcţia strict monotonă $f:R\to R$. Să se determine toate funcţiile $g:R\to R$, astfel încât

$$f(g(x+2017))\geq f(x)\geq f(g(x)+2017),\ (\forall)x\in R.$$

Problema 10.3. Fie P un punct, situat în interiorul unui triunghi ABC, astfel încât $\angle CAP\equiv\angle CBP$. Fie D mijlocul laturii AB, iar M şi N proiecţiile punctului P pe laturile BC şi AC, respectiv. Să se demonstreze că $DM=DN$.

Problema 10.4. Să se determine toate numere naturale nenule n, pentru care numărul

$$S_n=1\cdot C_{2n}^1+2\cdot C_{2n}^2+3\cdot C_{2n}^3+...+n\cdot C_{2n}^n$$

este un pătrat perfect mai mic decât 1 000 000.

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte

MULT SUCCES!

61-я МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинёв, 3-6 марта, 2017г.

X-й класс, первый день

Задача 10.1. Дан многочлен $P(X)=aX^2+bX+c$, где $a,b,c\in R$, $a\neq 0$ и x_1, x_2 - корни этого многочлена. Показать, что если a находится между c и $b-c$, то интервалу $(-1,1)$ может принадлежать не более чем один из этих корней.

Задача 10.2. Дана строго монотонная функция $f:R\to R$. Найти все функции $g:R\to R$, таких что

$$f(g(x+2017))\geq f(x)\geq f(g(x)+2017),\ (\forall)x\in R.$$

Задача 10.3. Пусть P – точка, расположенная внутри треугольника ABC, так что $\angle CAP\equiv\angle CBP$. Пусть D середина стороны AB, а M и N проекции точки P на стороны BC и AC, соответственно. Доказать, что $DM=DN$.

Задача 10.4. Найти все натуральные ненулевые числа n, для которых число

$$S_n=1\cdot C_{2n}^1+2\cdot C_{2n}^2+3\cdot C_{2n}^3+...+n\cdot C_{2n}^n$$

есть точный квадрат, меньше 1 000 000.

Время выполнения – 4астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!