61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 3-6 martie, 2017

Clasa a X-*a*, ziua a doua

SOLUŢIILE PROBLEMELOR

Problema 10.5. Fie a,b,c numere reale pozitive, $a\le b$, $a\le c$, astfel încât $\frac{a^2+b^2+c^2}{a(b+c)}=\frac{3}{2}$. Să se arate că $a=b=c$.

Rezolvare. Fără a restrânge generalitatea, considerăm $a\le b\le c$.

1) $a\le b \Rightarrow ac\le bc$; $ac+ab\le bc+ab$; $a(b+c)\le b(c+a)$ (1)

2) $b\le c \Rightarrow ab\le ac$; $ab+bc\le ac+bc$; $b(a+c)\le c(b+a)$ (2)

3) Reunim (1) şi (2): $a(b+c)\le b(c+a)\le c(a+b)$. (3)

Din $a\le b\le c$ şi (3) obţinem consecutiv:

$3a(b+c)\le a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=2(ab+bc+ca)\le 2(a^2+b^2+c^2)$.

Astfel, $3a(b+c)\le 2(a^2+b^2+c^2)$, sau $\frac{a^2+b^2+c^2}{a(b+c)}\ge\frac{3}{2}$. Egalitatea are loc doar în cazul $a=b=c$.

Rezolvare alternativă. $\frac{a^2+b^2+c^2}{a(b+c)}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2=3ab+3ac$. Dar

$2a^2+2b^2+2c^2=(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)\ge 2ab+2ac+2bc=2ab+2ac+bc+bc$.

Folosind faptul că $a\le\min(b,c)$, obţinem în continuare:

$2ab+2ac+bc+bc\ge 2ab+2ac+ab+ac=3ab+3ac$.

Egalitatea are loc doar pentru $a=b=c$. Afirmaţia este demonstrată.

Problema 10.6. Să se arate că există o infinitate de numere naturale *x, y, z,* cu *z* număr prim, care satisfac ecuaţia

$$x^2+y^3=2^z.$$

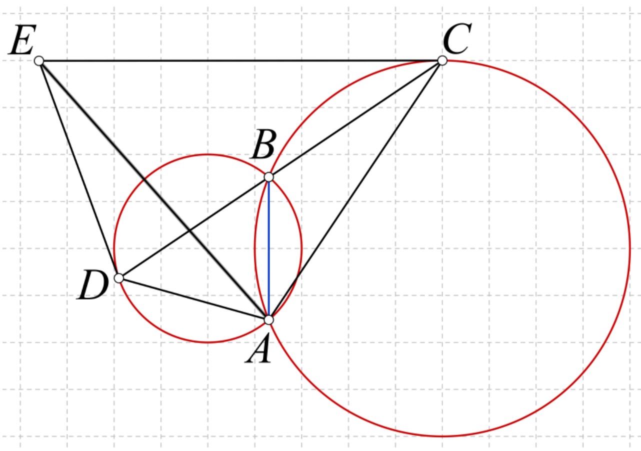
Rezolvare.

1. Observăm că numerele $x=8$, $y=4$ şi $z=7$ reprezintă o soluţie a ecuaţiei.
2. Vom folosi faptul că există o infinitate de numere de forma $6n+1$, unde *n* este număr natural.
3. Examinăm mulţimea *A* a tuturor numerelor naturale, pentru care $6n+1$ este un număr prim.
4. Pentru oricare $n\in A$ examinăm numerele $x_n=8^n$ şi $y_n=4^n$.

Avem: $(8^n)^2+(4^n)^3=2^{6n}+2^{6n}=2^{6n+1}$. Prin urmare, oricare triplet $(8^n,4^n,6n+1)$ cu $n\in A$ este o soluţie a ecuaţiei din enunţ. Întrucât există o infinitate de asemenea triplete, afirmaţia e demonstrată.

Problema 10.7. Două cercuri au o coardă comună *AB*. Prin punctul *B* se duce o dreaptă care intersectează cercurile în punctele *C* şi *D*, astfel încât *B* se află între *C* şi D. Tangentele la cercuri, duse prin punctele *C* şi *D*, se intersectează într-un punct *E*. Să se compare $AD\cdot AC$ cu $AB\cdot AE$.

Rezolvare.



Vom aplica proprietatea măsurii unghiului cu vârful pe cerc, cu o latură tangentă şi alta secantă a cercului şi măsura unghiului înscris în cerc.

Fie $m(\angle BAD)=\alpha \Rightarrow m(arcBD)=2\alpha$, atunci $m(\angle CDE)=\alpha$.

Fie $m(\angle BAC)=\beta \Rightarrow m(\angle DCE)=\beta$.

Din triunghiul *CDE* avem $m(\angle CED)=180^o-\alpha-\beta$.

Observăm că $m(\angle CAD)+m(CED)=180^o$, atunci patrulaterul *ACED* este inscriptibil, deci $\angle BDA\equiv\angle CEA$. (*)

Din (*) şi din faptul că $m(\angle BAD)=m(\angle CAE)=\alpha$,

rezultă că triunghiurile *BAD* şi *CAE* sunt asemenea, atunci $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow AD\cdot AC=AB\cdot AE$.

Problema 10.8. Pentru care valori ale parametrului real a ecuaţia $\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-\frac{x^2}{4}}}+x+\frac{x^2}{4}=0$ are cel puţin o soluţie reală?

Rezolvare. $\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-\frac{x^2}{4}}}+x+\frac{x^2}{4}=0 \Leftrightarrow \sqrt{5a+\sqrt{5a-x-\frac{x^2}{4}}}=-x-\frac{x^2}{4}$.

Se impune condiţia $-x-\frac{x^2}{4}\ge 0 \Leftrightarrow x\in[-4;0] \Rightarrow 0\le -x-\frac{x^2}{4}\le 1$. Notând $-x-\frac{x^2}{4}=t$, $0\le t\le 1$, obţinem $\sqrt{5a+\sqrt{5a+t}}=t \Leftrightarrow \begin{cases}0\le t\le 1,\\ 5a+\sqrt{5a+t}=t^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le t\le 1,\\ \sqrt{5a+t}=t^2-5a.\end{cases}$

$0\le t\le 1 \Rightarrow 0\le t^2\le 1 \Rightarrow -5a\le t^2-5a\le 1-5a$.

1. Dacă $1-5a<0 \Leftrightarrow a>\frac{1}{5} \Rightarrow t\in\varnothing$, deci $x\in\varnothing$.
2. Dacă $a=\frac{1}{5} \Rightarrow -1\le t^2-1\le 0 \Rightarrow \begin{cases}0\le t\le 1,\\ \sqrt{1+t}=t^2-1\end{cases} \Rightarrow t\in\varnothing$, deci $x\in\varnothing$.
3. Fie $a<\frac{1}{5}$, obţinem sistemul $\begin{cases}0\le t\le 1,\ t^2-5a\ge 0,\\ 5a+t=t^4-10at^2+25a^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le t\le 1,\ t^2\ge 5a,\\ 25a^2-5(1+2t^2)a+t^4-t=0.\end{cases}$

   Calculăm $\Delta=25(1+2t^2)^2-100(t^4-t)=100t^2+100t+25=25(2t+1)^2$.

   Obţinem: $\begin{cases}0\le t\le 1,\ t^2\ge 5a,\\ \left[\begin{array}{l}a=\frac{5(1+2t^2)-5(2t+1)}{50},\\ a=\frac{5(1+2t^2)+5(2t+1)}{50}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le t\le 1,\ t^2\ge 5a,\\ \left[\begin{array}{l}a=\frac{t^2-t}{5},\\ a=\frac{t^2+t+1}{5}.\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le t\le 1,\ t^2\ge 5a,\\ \left[\begin{array}{l}t^2-t-5a=0,\\ t^2+t+1-5a=0.\end{array}\right.\end{cases}$

   Observăm că $t^2-5a+t+1>0$, deci ecuaţia a doua a totalităţii nu are soluţii.

   A rămas să cercetăm sistemul $\begin{cases}0\le t\le 1,\\ t^2\ge 5a,\\ t^2-t-5a=0.\end{cases}$ (1) Calculăm $\Delta_1=1+20a$.

   3.1. Fie $\Delta_1<0 \Leftrightarrow a<-\frac{1}{20} \Rightarrow t\in\varnothing$, deci $x\in\varnothing$.

   3.2. Fie $a=-\frac{1}{20} \Rightarrow t=\frac{1}{2}$, atunci ecuaţia $-x-\frac{x^2}{4}=\frac{1}{2}$ are două soluţii reale distincte.

   3.3. Fie $\Delta_1>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{20}<a<\frac{1}{5}$. Distingem două situaţii:

   3.3.1. Fie $-\frac{1}{20}<a\le 0$, atunci sistemul (1) devine $\begin{cases}0\le t\le 1,\\ t^2-t-5a=0.\end{cases} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow t=\frac{1+\sqrt{1+20a}}{2}\in[0;1]$, deci ecuaţia va avea soluţii reale.

   3.3.2. Fie $0<a<\frac{1}{5}$, atunci sistemul (1) devine $\begin{cases}\sqrt{5a}\le t\le 1,\\ t^2-t-5a=0.\end{cases}$

   $t=\frac{1-\sqrt{1+20a}}{2}<0$, iar $t=\frac{1+\sqrt{1+20a}}{2}>1$, deci ecuaţia dată nu are soluţii reale.

Răspuns: $a\in\left[-\frac{1}{20};0\right]$

Notă: *Orice altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctaj maxim.*

Problema 10.5.

1. Se consideră, fără a restrânge generalitatea, $a \le b \le c$ .... 1p.
2. Se obţine inegalitatea dublă $a(b+c) \le b(c+a) \le c(a+b)$ .... 2p.
3. Se obţine $3a(b+c) \le 2(a^2+b^2+c^2)$ .... 3p.
4. Concluzia: egalitatea este posibilă doar pentru $a=b=c$ .... 1p.

Problema 10.6.

1. Se află o soluţie particulară $(8,4,7)$ .... 1p.
2. Se foloseşte afirmaţia că există o infinitate de numere prime de forma $6n+1$ .... 1p.
3. Se arată că $(8^n,4^n,6n+1)$ este o soluţie pentru acele valori ale lui *n*, pentru care $6n+1$ este prim .... 4p.
4. Concluzia finală .... 1p.

Problema 10.7.

1. Se obţine argumentat egalitatea $m(\angle CAD)+m(\angle CED)=180^O$ .... 3p.
2. Se obţin relaţiile $\angle BDA \equiv \angle CEA$; $\angle CAE \equiv \angle CDE$ .... 2p.
3. Se face concluzia că $\Delta BAD \sim \Delta CAE$ .... 1p.
4. Se face concluzia argumentată: $AD \cdot AC = AB \cdot AE$ .... 1p.

Problema 10.8.

1. Se notează $-x-\dfrac{x^2}{4}=t$ şi se face concluzia că $0 \le t \le 1$ .... 1p.
2. Se cercetează cazul $a \ge \dfrac{1}{5}$ .... 1p.
3. Se obţine totalitatea $\left[\begin{array}{l} t^2-t-5a=0, \\ t^2+t+1-5a=0 \end{array}\right.$, pentru $a<\dfrac{1}{5}$ .... 2p.
4. Se cercetează cazul $a<-\dfrac{1}{20}$ .... 1p.
5. Se cercetează cazul $-\dfrac{1}{20}<a \le 0$ .... 1p.

6. Se cercetează cazul $0 < a < \frac{1}{5}$ şi se obţine răspunsul corect ……………..…………………………………………..…1p.