A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 3-6 martie, 2017

Clasa a X-*a*, ziua a doua

Problema 10.5. Fie a,b,c numere reale pozitive, $a \le b$, $a \le c$, astfel încât $\frac{a^2+b^2+c^2}{a(b+c)} = \frac{3}{2}$. Să se arate că $a=b=c$.

Problema 10.6. Să se arate că există o infinitate de numere naturale *x, y, z,* cu *z* număr prim, care satisfac ecuaţia

$$x^2 + y^3 = 2^z.$$

Problema 10.7. Două cercuri au o coardă comună *AB.* Prin punctul *B* se duce o dreaptă care intersectează cercurile în punctele *C* şi *D,* astfel încât *B* se află între *C* şi D. Tangentele la cercuri, duse prin punctele *C* şi *D*, se intersectează într-un punct *E.* Să se compare $AD \cdot AC$ cu $AB \cdot AE$.

Problema 10.8. Pentru care valori ale parametrului real *a* ecuaţia

$$\sqrt{5a + \sqrt{5a - x - \frac{x^2}{4}}} + x + \frac{x^2}{4} = 0$$

are cel puţin o soluţie reală?

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte

MULT SUCCES!

61-я МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинёв, 3-6 марта, 2017г.

X-й класс, второй день

Задача 10.5. Пусть a,b,c действительные положительные числа, $a \le b$, $a \le c$, так что $\frac{a^2+b^2+c^2}{a(b+c)} = \frac{3}{2}$. Показать, что $a=b=c$.

Задача 10.6. Показать, что существует бесконечно много натуральных чисел *x, y, z,* где *z* простое число, которые удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^3 = 2^z.$$

Задача 10.7. Две окружности имеют общую хорду *AB.* Через точку *B* проведена прямая, которая пересекает окружности в точках *C* и *D,* так что *B* находится между *C* и D. Касательные к окружностям, проведённые через точки *C* и *D,* пересекаются в точке *E.* Сравнить $AD \cdot AC$ с $AB \cdot AE$.

Problema 10.8. При каких значениях действительного параметра *a* уравнение

$$\sqrt{5a + \sqrt{5a - x - \frac{x^2}{4}}} + x + \frac{x^2}{4} = 0$$

имеет хотя бы одно действительное решение?

Время выполнения – 4астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!