Ministerul Educației al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare

A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 3 – 6 martie 2017
Clasa a XI-a, prima zi
SOLUȚII

11.1. *Fie* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *un șir de numere întregi ce verifică relația* $a_{n+1}=a_n^{1009}+3^{2017}, \forall n\ge 1$. *Cât de multe pătrate perfecte poate conține acest șir? Argumentați răspunsul.*

Soluție. Valorile posibile ale perechilor $(a_n \bmod 4,\ a_{n+1} \bmod 4)$ sunt $(0,3)$, $(1,0)$, $(2,3)$ și $(3,2)$. Deci, indiferent de valoarea a_1, toți termenii a_n, $n\ge 3$, sunt egali cu 2 sau 3 (mod 4) și, deci, nu sunt pătrate perfecte. În concluzie, avem cel mult doi termeni pătrate perfecte: a_1 și a_2.

Să demonstrăm că a_1 și a_2 nu pot fi simultan pătrate perfecte. Presupunem contrariul, $a_1=a^2$ și $a_2=b^2$, unde a și b sunt numere naturale. Avem $b^2=a^{2018}+3^{2017}$, echivalent cu $(b-a^{1009})(b+a^{1009})=3^{2017}$, ceea ce implică $b-a^{1009}=3^s$ și $b+a^{1009}=3^t$, unde numerele naturale s și t verifică relațiile $s+t=2017$ și $s\le t$. Deci, $2a^{1009}=3^s(3^{t-s}-1)$, unde $s+t=2017$ și $s\le 1008$.

Dacă $s>0$, atunci $3^s(3^{t-s}-1)\vdots 3$ și, deci, $2a^{1009}\vdots 3$, ceea ce implică $a^{1009}\vdots 3^{1009}$. Rezultă că și partea dreaptă $3^s(3^{t-s}-1)$ se divide la 3^{1009}, ceea ce e imposibil datorită inegalității $s\le 1008$.

Dacă $s=0$, atunci $2a^{1009}=3^{2017}-1$. Avem $a^{1009}<3^{2017}-1<3^{2018}=9^{1009}$ și, deci, $a<9$. Deoarece $3^{2017}-1\equiv 2$ (mod 4), rezultă că a este impar, ceea ce implică $a\in\{1,3,5,7\}$. Cazul $a=1$ este imposibil deoarece $2\ne 3^{2017}-1$. Cazul $a=3$ este imposibil deoarece $3^{2017}-1$ nu se divide la 3. Cazul $a=5$ este imposibil deoarece $2\cdot 5^{1009}\vdots 10$, dar $3^{2017}-1\equiv 2 \pmod{10}$. Cazul $a=7$ este imposibil deoarece $3^{2017}-1\equiv 2 \pmod 7$.

Deci, numerele a_1 și a_2 nu pot fi simultan pătrate perfecte. În concluzie, printre termenii șirului $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ putem găsi cel mult un pătrat perfect (de exemplu, dacă a_1 este pătrat perfect).

11.2. *Să se afle toate funcțiile continue* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *ce verifică relația* $f(x)=5f(5x)-5x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Soluție. Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\frac{5}{24}x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Avem $g(5x)=f(5x)-\frac{25}{24}x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deoarece $f(5x)=\frac{1}{5}f(x)+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $g(5x)=\frac{1}{5}f(x)-\frac{1}{24}x=\frac{1}{5}g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, ceea ce implică relația recurentă $g(x)=\frac{1}{5}g\left(\frac{1}{5}x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, adică $g(x)=\frac{1}{5^n}g\left(\frac{1}{5^n}x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Deoarece funcția f este continuă, rezultă că și funcția g este continuă. Avem

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5^n}g\left(\frac{1}{5^n}x\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)\cdot g\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5^n}x\right)\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

ceea ce implică $f(x)=\frac{5}{24}x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Substituind în relația inițială, obținem că această funcție este unica ce verifică condiția problemei.

11.3. *Să se determine toate numerele de patru cifre, ce sunt divizibile cu 11 și au suma cifrelor cu 1 mai mică decât produsul lor.*

Soluție. Numărul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 11 dacă și numai dacă $[a+c-(b+d)]$ este divizibil cu 11. Deoarece $b+d \le 18$ și $a+c \le 18$, atunci avem 2 cazuri posibile: 1) $a+c-(b+d)=0$ și 2) $a+c-(b+d)=\pm 11$. Din condiția problemei avem $a+b+c+d+1=abcd$, ceea ce implică $abcd>1$, adică $a,b,c,d \ne 0$.

Cazul 1. $a+c-(b+d)=0$.

Deoarece $a+c=b+d$, rezultă că $abcd=2(a+c)+1$. Deci produsul $abcd$ este un număr impar, adică toate cifrele a,b,c,d sunt numere impare, ceea ce implică dubla inegalitate $5=2(1+1)+1 \le abcd \le 2(9+9)+1=37$.

Rezultă că cel puțin o cifră dintre cifrele a,b,c,d trebuie să fie mai mică decât 3, deoarece, în caz contrar, am fi avut inegalitatea falsă $37 \ge abcd \ge 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$. Deoarece această cifră trebuie să fie impară, atunci ea este egală cu 1.

Fie $a=1$. Atunci $1+c=b+d$ și $2c+3=bcd$, adică $bcd \le 2\cdot 9+3=21$. Analog, cel puțin o cifră dintre cifrele b,c,d trebuie să fie mai mică decât 3, deoarece, în caz contrar, am fi avut $21 \ge bcd \ge 3\cdot 3\cdot 3=27$, ceea ce e fals. Dacă ar fi și $c=1$, atunci $2=b+d$ și $5=bd$, adică $b=d=1$, dar $5\ne 1$. Deci $c\ne 1$, adică $b=1$ sau $d=1$.

Fie $b=1$. Atunci $1+c=1+d$ și $2c+3=cd$, ceea ce implică $c=d$ și $2c+3=c^2$, adică $c=3$ și $d=3$. Astfel, obținem numărul $\overline{abcd}=1133$. Deoarece condițiile inițiale ($a+c=b+d$ și $a+b+c+d+1=abcd$) sunt simetrice în raport cu a și c (respectiv b și d), obținem încă 3 soluții: $3113, 1331, 3311$. Dacă $d=1$, atunci raționamentul e analog și obținem aceleași soluții. Similar obținem și în cazul $a\ne 1$ și una din cifrele b,c,d este 1.

Cazul 2. $a+c=b+d+11$.

Cercetăm doar acest caz, deoarece cazul $a+c+11=b+d$ este analog. Rezultă că $2(b+d)+12=abcd$, adică produsul $abcd$ este un număr par. Avem $13=1+1+11 \le b+d+11=a+c \le 9+9=18$, adică are loc dubla inegalitate $13 \le a+c \le 18$ **(*)**.

Deoarece $a+c \le 18$, atunci $b+d=a+c-11 \le 9+9-11=7$. Avem $abcd=2(b+d)+12 \le 2\cdot 7+12=26$, adică $ac \le \frac{26}{bd} \le 26$. Atunci $c \ge 13-a \ge 13-9=4$, adică $a \le 26/c \le 26/4=6{,}5$, ceea ce implică $a \le 6$. Analog obținem $c \le 6$. Obținem $a+c \le 6+6=12$, contradicție cu **(*)**. Deci, în cazul 2 nu avem soluții.

În concluzie, toate soluțiile problemei sunt $1133, 3113, 1331, 3311$.

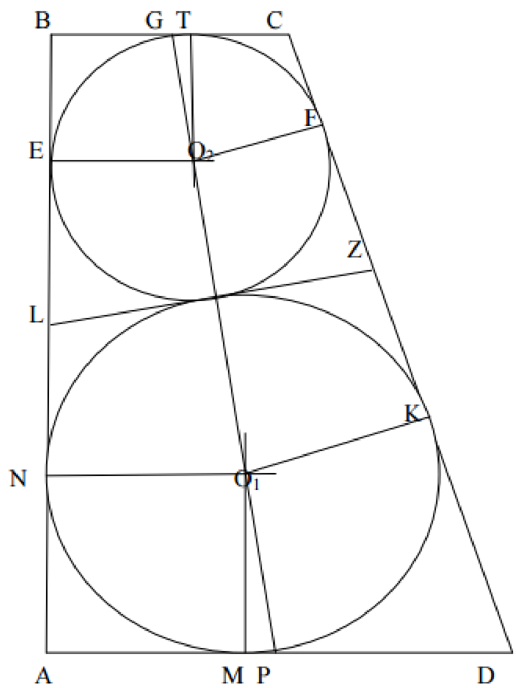
11.4. *Într-un trapez dreptunghic $ABCD$, cu unghiurile drepte în vârfurile A și B, se află două cercuri. Unul din ele este tangent la laturile laterale și la baza mare AD, iar celălalt este tangent la laturile laterale, la baza mică BC și la primul cerc.*

1) Dreapta ce trece prin centrele cercurilor intersectează AD în punctul P. Să se demonstreze că $\frac{AP}{PD}=\sin(\angle D)$.

2) Să se determine aria trapezului, dacă razele cercurilor sunt $\frac{4}{3}$ *și* $\frac{1}{3}$.

Soluție.

1) Deoarece cercurile sunt tangente între ele, construim tangenta lor comună LZ. Notăm: $m(\angle D)=\alpha$, R – raza cercului mare cu centrul în O_1, r – raza cercului mic cu centrul în O_2, M – piciorul perpendicularei dusă din O_1 pe AD, N – piciorul perpendicularei dusă din O_1 pe AB, K – piciorul perpendicularei dusă din O_1 pe CD, E – piciorul perpendicularei din O_2 pe AB, F – piciorul perpendicularei din O_2 pe CD, T – piciorul perpendicularei din O_2 pe BC, S – punctul de intersecție a cercurilor, $G=(O_1O_2)\cap(BC)$, $P=(O_1O_2)\cap(AD)$ și $m(\angle MO_1P)=\varphi$.



Conform teoremei de egalitate a segmentelor, determinate de tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc, avem

$$AM = AN = R,\ BE = BT = r,\ LE = LS = LN,$$
$$ZF = ZS = ZK,\ DM = DK,\ CT = CF.$$

Din egalitatea unghiurilor determinate de două drepte paralele și o secantă, teorema despre unghiurilor opuse la vârf și relațiile de perpendicularitate $O_1M \perp AD$ și $O_2T \perp BC$, obținem

$$m(\angle GO_2T) = \varphi,\ m(\angle NO_1S) = 90^\circ - \varphi,\ m(\angle NLS) = 90^\circ + \varphi,$$
$$m(\angle EO_2G) = 90^\circ - \varphi,\ m(\angle EO_2S) = 90^\circ + \varphi,\ m(\angle ELS) = 90^\circ - \varphi,$$
$$m(\angle MO_1K) = 180^\circ - \alpha,\ m(\angle TO_2F) = \alpha,\ m(\angle BCD) = 180^\circ - \alpha,$$
$$m(\angle SO_1K) = \alpha + \varphi,\ m(\angle SZK) = 180^\circ - (\alpha + \varphi),$$
$$m(\angle SZF) = \alpha + \varphi,\ m(\angle SO_2F) = 180^\circ - (\alpha + \varphi).$$

Atunci $MP = R\,tg\varphi$ și $AP = AM + MP = R(1 + tg\varphi)$ **(1)**.

Conform teoremei cosinusurilor pentru $VNSO_1$ și $VNSL$, avem $2R^2(1-\sin\varphi) = NS^2 = 2LN^2(1+\sin\varphi)$, adică $LN = R\sqrt{\dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}}$ **(2)**. Analog, din VEO_2S și $VELS$ avem $2r^2(1+\sin\varphi) = ES^2 = 2LE^2(1-\sin\varphi)$, adică $LE = r\sqrt{\dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}$ **(3)**. Deoarece $LN = LE$, atunci din **(2)** și **(3)** obținem $r = R\cdot\dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$ **(4).** Efectuând raționamente similare pentru perechile de triunghiuri (VSO_1K, $VSZK$) și (VSO_2F, $VSZF$), obținem $r = R\cdot\dfrac{1-\cos(\alpha+\varphi)}{1+\cos(\alpha+\varphi)}$ **(5)**.

Din **(4)** și **(5)** avem $\dfrac{1-\cos(\alpha+\varphi)}{1+\cos(\alpha+\varphi)} = \dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$, ceea ce implică $\sin\varphi = \cos(\alpha+\varphi)$, adică $\cos(90^\circ-\varphi) = \cos(\alpha+\varphi)$.

Deoarece $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ și $0^\circ < \alpha+\varphi < 180^\circ$, atunci $90^\circ - \varphi = \alpha + \varphi$, adică $\alpha = 90^\circ - 2\varphi$ **(6).**

Deoarece $MD = KD$, atunci în mod analog pentru VO_1KM și $VDKM$ obținem $MD = R\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$. Avem $PD = MD - MP = R\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - R\,tg\varphi$ **(7).** Din relațiile **(1)**, **(6)** și **(7)** obținem

$$\frac{AP}{PD} = \frac{R(1+tg\,\varphi)}{R\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - tg\,\varphi\right)} = \frac{1+tg\,\varphi}{\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - tg\,\varphi} = \frac{1+tg\,\varphi}{\sqrt{\dfrac{1+\sin 2\varphi}{1-\sin 2\varphi}} - tg\,\varphi} = \frac{1+tg\,\varphi}{\dfrac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi} - tg\,\varphi} = \cos 2\varphi = \sin\alpha.$$

2) Dacă $R = \dfrac{4}{3}$ și $r = \dfrac{1}{3}$, atunci din **(4)** și **(6)** obținem $\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$, ceea ce implică $\sin\varphi = \dfrac{3}{5}$ și $\cos\varphi = \dfrac{4}{5}$, adică $\sin\alpha = \cos 2\varphi = \dfrac{7}{25}$ și $\cos\alpha = \dfrac{24}{25}$ **(8).** Atunci, din **(8)** avem $AD = AM + MD = R + R\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{32}{3}$ **(9)**. Din **(2)** și **(3)** obținem $AB = AN + NL + LE + EB = R + r + 2R\sqrt{\dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}} = 3$ **(10)**. În final, $BC = BT + TC = r + TC$. Analog cu **(3)**, din VTO_2F și $VTCF$ avem $TC = r\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, de unde rezultă că $BC = r + r\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{8}{21}$ **(11)**, ceea ce implică $A_{ABCD} = \dfrac{AD+BC}{2}\cdot AB = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{32}{3} + \dfrac{8}{21}\right)\cdot 3 = \dfrac{116}{7}$.

Barem de corectare

11.1.

Scrierea valorilor posibile ale perechilor $(a_n \bmod 4,\ a_{n+1} \bmod 4)$ 1p

Deducerea faptului că toți termenii a_n, $n \geq 3$, sunt egali cu 2 sau 3 (mod 4)..1p

Deducerea faptului că toți termenii a_n, $n \geq 3$, nu sunt pătrate perfecte..1p

Presupunerea că $a_1 = a^2$ și $a_2 = b^2$ și deducerea $b - a^{1009} = 3^s$ și $b + a^{1009} = 3^t$, unde $s + t = 2017$ și $s \leq t$ ...1p

Obținerea relației $2a^{1009} = 3^s(3^{t-s} - 1)$, unde $s + t = 2017$ și $s \leq 1008$..1p

Argumentarea faptului că nu poate fi $s > 0$..1p

Argumentarea faptului că nu poate fi $s = 0$..1p

11.2.

Considerarea funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \dfrac{5}{24}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 1p

Argumentarea faptului că funcția g este continuă..1p

Demonstrarea relației recurente pentru funcția $g(x)$ 1p

Obținerea relației iterative pentru funcția $g(x)$ 1p

Obținerea tuturor funcțiilor $g(x)$ posibile..1p

Obținerea tuturor funcțiilor $f(x)$ posibile..1p

Verificarea funcțiilor $f(x)$ obținute și selectarea soluțiilor 1p

11.3.

Scrierea criteriului de divizibilitate cu 11..1p

Scrierea tuturor cazurilor posibile..1p

Demonstrarea faptului că $a, b, c, d \neq 0$ 1p

Studierea cazului $a = 1$ atunci când $a + c = b + d$ 1p

Studierea cazului $b = 1$ sau $d = 1$ și obținerea soluțiilor..1p

Obținerea inegalității $ac \leq 26$ în cazul $(a + c) - (b + d) = \pm 11$ 1p

Demonstrarea faptului că în cazul $(a + c) - (b + d) = \pm 11$ nu avem soluții..1p

11.4.

Obținerea ariei trapezului în cazul $R = 4/3$ și $r = 1/3$..1p

Scrierea relațiilor de egalitate a segmentelor determinate de tangentele duse din punct exterior la cercurile date..........1p

Obținerea egalității $AP = R(1 + \operatorname{tg}\varphi)$..1p

Obținerea relației $r = R\dfrac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}$ 1p

Obținerea relației $r = R\dfrac{1-\cos(\alpha+\varphi)}{1+\cos(\alpha+\varphi)}$ 1p

Obținerea egalității $\alpha = 90^{o} - 2\varphi$ 1p

Demonstrarea faptului că $\dfrac{AP}{PD} = \cos 2\varphi = \sin\alpha$ 1p