Ministerul Educației al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare

A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 3 – 6 martie 2017

Clasa a XI-a, prima zi

11.1. Fie $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ un șir de numere întregi ce verifică relația $a_{n+1}=a_n^{1009}+3^{2017}, \forall n\geq 1$. Cât de multe pătrate perfecte poate conține acest șir? Argumentați răspunsul.

11.2. Să se afle toate funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ce satisfac relația $f(x)=5f(5x)-5x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

11.3. Să se determine toate numerele de patru cifre, ce sunt divizibile cu 11 și au suma cifrelor cu 1 mai mică decât produsul lor.

11.4. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$, cu unghiurile drepte în vârfurile A și B, se află două cercuri. Unul din ele este tangent la laturile laterale și la baza mare AD, iar celălalt este tangent la laturile laterale, la baza mică BC și la primul cerc.

1) Dreapta ce trece prin centrele cercurilor intersectează AD în punctul P. Să se demonstreze că $\dfrac{AP}{PD}=\sin(\angle D)$.

2) Să se determine aria trapezului, dacă razele cercurilor sunt $\dfrac{4}{3}$ și $\dfrac{1}{3}$.

Timp alocat - 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

61-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 3 – 6 марта 2017

XI класс, первый день

11.1. Пусть последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, где $a_n\in\mathbf{Z}$, удовлетворяет условию $a_{n+1}=a_n^{1009}+3^{2017}$, $\forall\, n\geq 1$. Сколько полных квадратов содержит это последовательность? Обосновать ответ.

11.2. Найти все непрерывные функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которых $f(x)=5f(5x)-5x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

11.3. Четырехзначное число делится на 11, а сумма его цифр на 1 меньше произведения этих цифр. Найти все такие числа.

11.4. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямыми углами при вершинах A и B расположены 2 окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, а вторая касается боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

1) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает AD в точке P. Доказать, что $\dfrac{AP}{PD}=\sin(\angle D)$.

2) Найти площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{1}{3}$.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!