Ministerul Educației al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare

A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 3 – 6 martie 2017

Clasa a XI-a, ziua a doua

SOLUȚII

11.5. *Să se arate că* $8\cdot\cos^2 x\cdot(1-\operatorname{ctg} x)<1,\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

Soluție. Fie $f(x)=\cos x$ și $g(x)=\sin x-\cos x$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. Avem $f(x)\ge 0$ și $g(x)\ge 0$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. Aplicând inegalitatea mediilor, obținem $2\sqrt{f(x)g(x)}\le f(x)+g(x)$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, adică $2\sqrt{\cos x(\sin x-\cos x)}\le\sin x$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, ceea ce implică $4\cos x(\sin x-\cos x)\le\sin^2 x$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. Rezultă că $\frac{\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x}\le\frac{\sin x}{4}$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, ceea ce implică $8\cos^2 x(1-\operatorname{ctg} x)=\frac{8\cos^2 x(\sin x-\cos x)}{\sin x}\le 2\sin x\cos x=\sin 2x\le 1$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. Cazul de egalitate ar putea fi atunci când $\sin 2x=1$, adică $x=\frac{\pi}{4}$, dar deoarece $8\cos^2\frac{\pi}{4}(1-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4})=0<1$, rezultă că inegalitatea este strictă, adică $8\cos^2 x(1-\operatorname{ctg} x)<1$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

11.6. *Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{2k}61^k\right)\Big/\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{2k+1}61^k\right)$.

Soluție. Avem $x_n=\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{2k}61^k=\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{2k}\left(\sqrt{61}\right)^{2k}$ și $y_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{2k+1}61^k=\frac{1}{\sqrt{61}}\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{2k+1}\left(\sqrt{61}\right)^{2k+1}$, $\forall n\ge 1$, ceea ce implică $x_n+y_n\sqrt{61}=(1+\sqrt{61})^{2n}$ și $x_n-y_n\sqrt{61}=(1-\sqrt{61})^{2n}$, $\forall n\ge 1$. Obținem $x_n=\frac{(1+\sqrt{61})^{2n}+(1-\sqrt{61})^{2n}}{2}$ și $y_n=\frac{(1+\sqrt{61})^{2n}-(1-\sqrt{61})^{2n}}{2\sqrt{61}}$, $\forall n\ge 1$, ceea ce implică $\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{61}\cdot\frac{(1+\sqrt{61})^{2n}+(1-\sqrt{61})^{2n}}{(1+\sqrt{61})^{2n}-(1-\sqrt{61})^{2n}}$, $\forall n\ge 1$. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n}^{2k}61^k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{2k+1}61^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{61}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{61})^{2n}+(1-\sqrt{61})^{2n}}{(1+\sqrt{61})^{2n}-(1-\sqrt{61})^{2n}}=\sqrt{61}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{\sqrt{61}-1}{\sqrt{61}+1}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{\sqrt{61}-1}{\sqrt{61}+1}\right)^{2n}}=\sqrt{61}.$$

11.7. *Aflați toate valorile parametrului real* a, *pentru care sistemul*

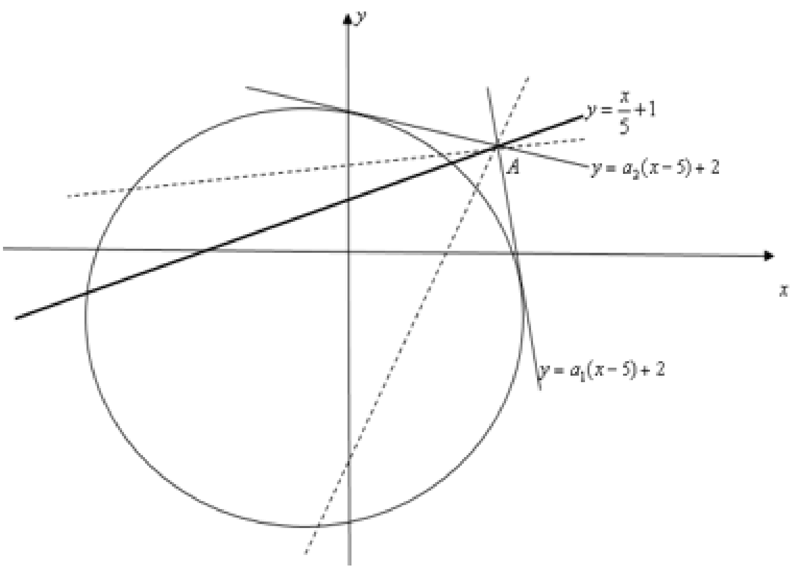
$$\begin{cases}x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=51\\ ax-y-5a+2=0\end{cases}$$

are exact 2 soluții reale distincte.

Soluție. Cercetăm expresia $E(x,y)=x-5y+5$ ce se află în modul. Avem două cazuri posibile.

Cazul 1. Fie $E(x,y)\ge 0$, adică $y\le\frac{x}{5}+1$. Obținem că sistemul inițial este echivalent cu sistemul de ecuații

$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-x+5y-5=51 \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$, care poate fi scris în forma echivalentă $\begin{cases} (x+2)^2+(y+2)^2=8^2 \\ y=a(x-5)+2 \end{cases}$.



Ecuația $y=a(x-5)+2$ determină un fascicul de drepte ce trec prin punctul $A(5;2)$. Una din aceste drepte este dreapta "frontieră" $y=\frac{x}{5}+1$ (pentru $a=\frac{1}{5}$), ce mărginește semiplanul determinat de condiția impusă $E(x,y)\geq 0$.

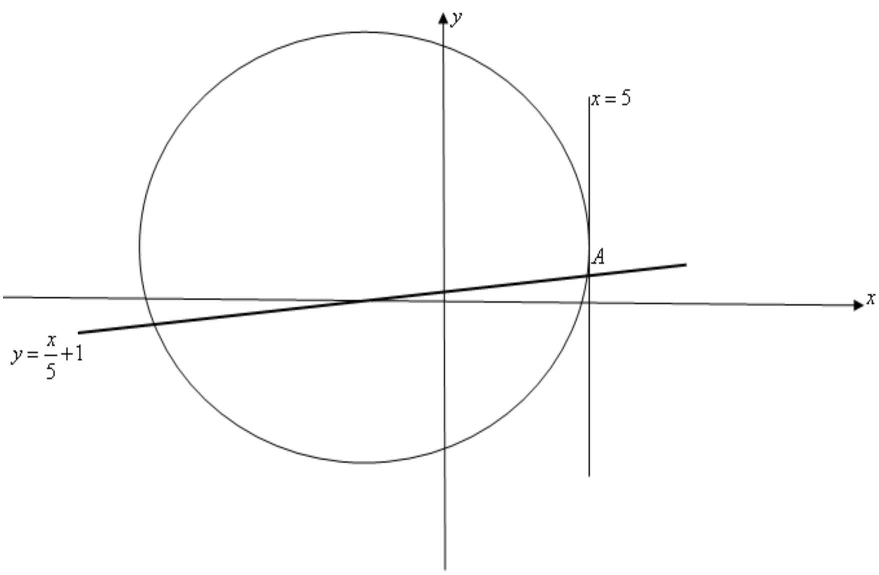
A doua dreaptă "frontieră" este dreapta $y=a_1(x-5)+2$, care este tangentă la cercul $(x+2)^2+(y+2)^2=8^2$. Din aceste considerente, ecuația $(x+2)^2+(a_1(x-5)+4)^2=8^2$ are exact o soluție. Această ecuație are forma echivalentă $(1+a_1^2)x^2-(10a_1^2-8a_1-4)x+(25a_1^2-40a_1-44)=0$ și, deoarece această ecuație are exact o soluție, rezultă că $0=\Delta=60a_1^2+224a_1+192$. Se obțin două valori posibile ale parametrului a_1: $-\frac{4}{3}$ și $-2,4$ (pentru cele două tangente duse din punctul A la cercul dat), dar alegem valoarea $a_1=-2,4$, pentru care se verifică condiția impusă $E(x,y)\geq 0$ (după cum se observă și din grafic).

Deci, în acest caz, obținem:

1) dacă $a\in(-\infty;-2,4)$, atunci avem două puncte de intersecție, adică sistemul are două soluții;
2) dacă $a=-2,4$, atunci avem un singur punct de intersecție, adică sistemul are doar o soluție;
3) dacă $a\in(-2,4;0,2)$, atunci sau nu avem puncte de intersecție, sau aceste puncte se află mai sus de dreapta "frontieră" $y=\frac{x}{5}+1$, adică sistemul nu are soluții;
4) dacă $a\in[0,2;+\infty)$, atunci avem două puncte de intersecție, adică sistemul are două soluții.

Cazul 2. Fie $E(x,y)<0$, adică $y>\frac{x}{5}+1$. Obținem că sistemul inițial este echivalent cu sistemul de ecuații

$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y+x-5y+5=51 \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$, care poate fi scris în forma echivalentă $\begin{cases} (x+3)^2+(y-3)^2=64 \\ y=a(x-5)+2 \end{cases}$.



Raționamentul este analog cazului anterior, doar că a doua dreaptă de frontieră (ce e tangentă la cercul $(x+3)^2+(y-3)^2=64$), este dreapta $x=5$. Deci, în acest caz obținem:

1) dacă $a\in(-\infty;0,2)$, atunci avem două puncte de intersecție, adică sistemul are două soluții;
2) dacă $a\in[0,2;+\infty)$, atunci sau nu avem puncte de intersecție, sau aceste puncte se află mai jos de dreapta "frontieră" $y=\frac{x}{5}+1$, adică sistemul nu are soluții.

Unind cele două cazuri, obținem:

1) dacă $a \in (-\infty; -2,4)$, atunci sistemul are 4 soluții;
2) dacă $a = -2,4$, atunci sistemul are 3 soluții;
3) dacă $a \in (-2,4; 0,2)$, atunci sistemul are 2 soluții;
4) dacă $a \in [0,2; +\infty)$, atunci sistemul are 2 soluții.

Deci, sistemul are exact 2 soluții atunci și numai atunci, când $a \in (-2,4; +\infty)$.

11.8. *Un elev trebuia să înmulțească un număr de 3 cifre cu un număr de 4 cifre (numerele nu se încep cu 0). În loc să procedeze astfel, el doar a alipit numărul de 4 cifre la dreapta numărului de 3 cifre, obținând în rezultat un număr de 7 cifre, care este de N ori ($N \in$ ¥) mai mare decât rezultatul corect.*

a) Poate N să fie egal cu 2 sau 10?

b) Să se găsească cea mai mare valoare posibilă a lui N.

Soluție. Fie $\overline{abc}$ - numărul de 3 cifre și $\overline{defg}$ - numărul de 4 cifre. Atunci numărul de 7 cifre are forma $\overline{abcdefg}$. Din condiția problemei avem $\overline{abcdefg} = N \cdot \overline{abc} \cdot \overline{defg}$, echivalent cu $\overline{abc} \cdot 10^4 = \overline{defg} \cdot (N \cdot \overline{abc} - 1)$ **(1).**

a) Fie $N = 2$. Atunci **(1)** ia forma $\overline{abc} \cdot 10^4 = \overline{defg} \cdot (2 \cdot \overline{abc} - 1)$ **(2).** Deoarece $(2 \cdot \overline{abc} - 1)$ este un număr impar, și $\overline{defg}$ nu se divide la 10^4, atunci $(2 \cdot \overline{abc} - 1)$ trebuie să se dividă la un număr de forma 5^m $(m \geq 1)$. Fie, de exemplu, $2 \cdot \overline{abc} - 1 = 5^4 = 625$. Atunci $\overline{abc} = 313$ și, din **(2)**, obținem, că $\overline{defg} = 5008$, adică $\overline{abcdefg} = 3135008$. Deci valoarea $N = 2$ e posibilă.

Pentru $N = 10$ egalitatea **(1)** ia forma $\overline{abc} \cdot 10^4 = \overline{defg} \cdot (10 \cdot \overline{abc} - 1)$. Expresia $(10 \cdot \overline{abc} - 1)$ e un număr impar (nu se divide la 2) și are ultima cifră 9 (nu se divide la 5). Deci, la 10^4 trebuie să se dividă numărul $\overline{defg} < 10^4$, ceea ce e imposibil, adică valoarea $N = 10$ e imposibilă.

b) Din egalitatea **(1)** avem $\overline{abc} \cdot 10^4 = (N \cdot \overline{abc} - 1) \cdot \overline{defg} \geq (N \cdot \overline{abc} - 1) \cdot d \cdot 10^3$, ceea ce implică inegalitatea $\overline{abc} \cdot 10 \geq (N \cdot \overline{abc} - 1) \cdot d = Nd \cdot \overline{abc} - d$, adică $\overline{abc} \cdot (Nd - 10) \leq d < 10$, de unde rezultă că $Nd - 10 \leq 0$, adică are loc inegalitatea $Nd \leq 10$. Deci, sau $d = 1$ și $N < 10$, sau $2 \leq d \leq 9$ și $N \leq 5$.

Fie că are loc cazul 1), adică $d = 1$ și $N < 10$. Atunci din **(1)** avem $\overline{abc} \cdot 10^4 = \overline{1efg} \cdot N \cdot \overline{abc} - \overline{1efg}$, ceea ce implică $\overline{1efg} = \overline{abc} \cdot (N \cdot \overline{1efg} - 10^4)$ **(3)**, adică are loc inegalitatea $0 < N \cdot \overline{1efg} - 10^4 = \frac{\overline{1efg}}{\overline{abc}} < 20$, de unde rezultă $10000 < N \cdot \overline{1efg} < 10020$ **(4)**. Deci, avem $N > \frac{10000}{\overline{1efg}} > \frac{10000}{2000} = 5$ și, deoarece $N < 10$, rezultă că $N \in \{6, 7, 8, 9\}$.

Fie $N = 9$. Atunci din **(4)** obținem $\frac{10000}{9} < \overline{1efg} < \frac{10020}{9}$, ceea ce implică $1111 < \overline{1efg} \leq 1113$, adică $\overline{1efg} \in \{1112, 1113\}$. Considerând $\overline{1efg} = 1112$, din relația **(3)** obținem $1112 = \overline{abc} \cdot 8$, adică $\overline{abc} = 139$. Deci $\overline{abcdefg} = 1391112$ și $N_{\max} = 9$.

Barem de corectare

11.5.

Considerarea funcțiilor $f(x)=\cos x\geq 0$ și $g(x)=\sin x-\cos x\geq 0$, $\forall x\in\left[\pi/4,\pi/2\right]$..1p

Obținerea inegalității $2\sqrt{\cos x(\sin x-\cos x)}\leq \sin x$, $\forall x\in\left[\pi/4,\pi/2\right]$..1p

Obținerea inegalității $4\cos x(\sin x-\cos x)\leq \sin^2 x$, $\forall x\in\left[\pi/4,\pi/2\right]$..1p

Obținerea inegalității $\dfrac{\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x}\leq\dfrac{\sin x}{4}$, $\forall x\in\left[\pi/4,\pi/2\right]$..1p

Obținerea inegalității $8\cos^2 x(1-\operatorname{ctg} x)\leq \sin 2x$, $\forall x\in\left[\pi/4,\pi/2\right]$..1p

Obținerea inegalității $8\cos^2 x(1-\operatorname{ctg} x)\leq 1$, $\forall x\in\left[\pi/4,\pi/2\right]$..1p

Obținerea inegalității $8\cos^2 x(1-\operatorname{ctg} x)< 1$, $\forall x\in\left[\pi/4,\pi/2\right]$..1p

11.6.

Scrierea numărătorului într-o formă comodă ce va oferi posibilitatea de aplicare a Binomului lui Newton.........1p

Scrierea numitorului într-o formă comodă ce va oferi posibilitatea de aplicare a Binomului lui Newton 1p

Obținerea ecuațiilor $x_n+y_n\sqrt{61}=(1+\sqrt{61})^{2n}$, $\forall n\geq 1$..1p

Obținerea ecuațiilor $x_n-y_n\sqrt{61}=(1-\sqrt{61})^{2n}$, $\forall n\geq 1$..1p

Obținerea soluțiilor x_n și y_n, $\forall n\geq 1$..1p

Obținerea formulei pentru raportul x_n/y_n, $\forall n\geq 1$..1p

Calcularea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\sqrt{61}$ 1p

11.7.

Separarea cazurilor posibile..1p

Obținerea sistemului de intersecție a unui cerc cu o dreaptă (în primul caz) 1p

Declararea faptului că ecuația $y=a(x-5)+2$ determină un fascicul de drepte ce trec prin punctul $A(5,2)$ 1p

Determinarea dreptelor "frontiere" ($a_1=1/5$ și $a_2=-2,4$)..1p

Determinarea numărului de soluții în dependență de parametrul a (în primul caz).......................................1p

Obținerea sistemului de intersecție a unui cerc cu o dreaptă (în al doilea caz) 1p

Deducerea corectă a răspunsului final prin unirea celor două cazuri...1p

11.8.

Obținerea egalității $\overline{abc}\cdot 10^4=\overline{defg}\cdot(N\cdot\overline{abc}-1)$ 1p

Studierea cazului $N=2$ 1p

Studierea cazului $N=10$ 1p

Obținerea inegalității $Nd \leq 10$ 1p

Obținerea cazurilor $d = 1, N < 10$ și $2 \leq d \leq 9, N \leq 5$ 1p

Deducerea faptului că $N_{\max} = 9$ 2p