A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 3 – 6 martie 2017

Clasa a XII-a, prima zi

SOLUȚII:

12.1.

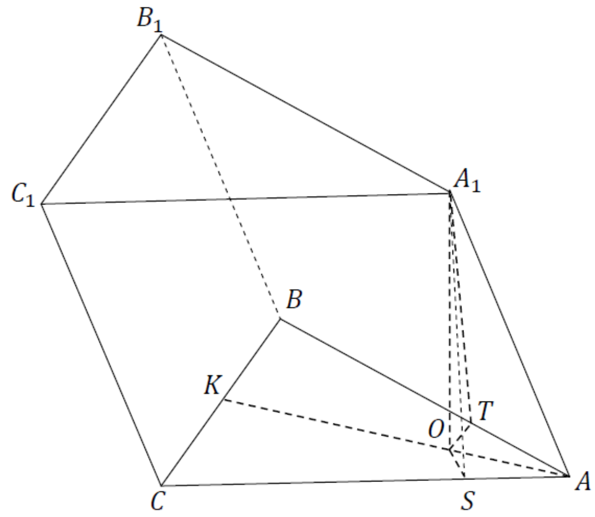
$$I=\int_0^1 \sqrt{4x^4-4x^3e^{x^2}+x^2e^{2x^2}}dx=\int_0^1 \sqrt{\left(2x^2-xe^{x^2}\right)^2}dx=\int_0^1 \left|2x^2-xe^{x^2}\right|dx$$

$$=\int_0^1 |x|\left|2x-e^{x^2}\right|dx=\int_0^1 x\left|2x-e^{x^2}\right|dx.$$

Așa cum $e^{x^2}\geq x^2+1\geq 2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, avem că $\left|2x-e^{x^2}\right|=e^{x^2}-2x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Deci $I=\int_0^1\left(xe^{x^2}-2x^2\right)dx=\left(\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}e-\frac{7}{6}$.

12.2.



Fie $AB=BC=AC=a$.

Fie $\mathcal{A}_{AA_1C_1C}=\mathcal{A}_{AA_1B_1B}=30$ cm^2,

$\mathcal{A}_{BCC_1B_1}=45$ cm^2 . Fie $A_1O\perp(ABC)$,

$A_1O=5$ cm.

Fie $OS\perp AC, OT\perp AB$.

Atunci $A_1S=A_1T\Rightarrow OS=OT\Rightarrow$

AO – bisectoarea unghiului CAB sau a unghiului suplimentar lui.

Fie $AK\perp BC, K\in BC$.

Cazul I. Fie $O\in AK$.

Atunci $OA=2OS,\ A_1S=\frac{30}{a}$,

$A_1O^2+OS^2=A_1S^2$

$\Leftrightarrow 25+OS^2=\frac{900}{a^2}$. (1)

AO – bisectoare $\Rightarrow AO\perp BC$,

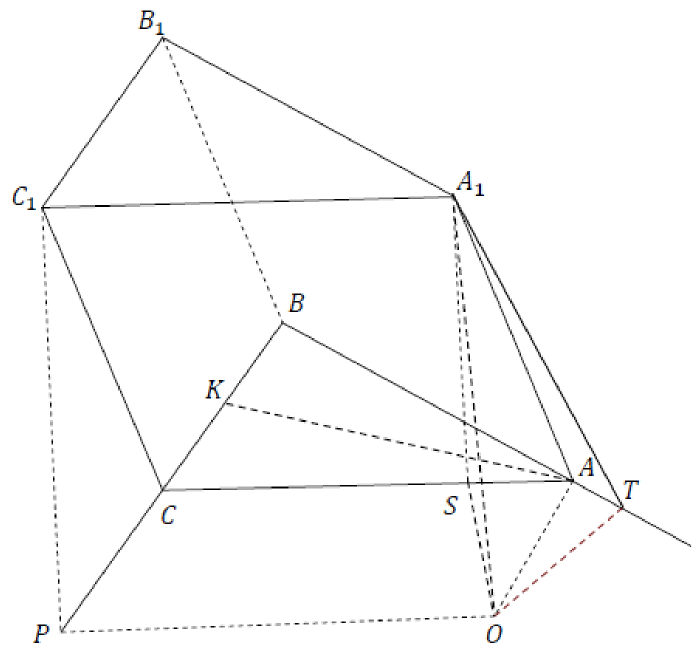
$A_1A\perp BC\Rightarrow BCC_1B_1$- dreptunghi

$\Rightarrow A_1A\cdot a=45\Rightarrow A_1A=\frac{45}{a}$.

Atunci $A_1A^2=A_1O^2+OA^2\Rightarrow$

$\frac{2025}{a^2}=25+4OS^2$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că $a=\sqrt{21}$ cm.



Cazul II. Fie $O\,\overline{\in}\,AK$.

AO – bisectoarea unghiului SAT

$\Rightarrow AO\parallel BC, A_1A\parallel C_1C$

$\Rightarrow (A_1AO)\parallel(C_1CB)$.

$AO\perp AK\Rightarrow A_1A\perp AK\Rightarrow C_1C\perp AK$.

Cum $AK\perp BC$,

avem că $AK\perp(BCC_1B_1)\Rightarrow$

$(BCC_1B_1)\perp(ABC)$.

Fie $C_1P\perp(ABC)\Rightarrow$

$P\in BC$,

$BC \cdot C_1P = 45 \Rightarrow BC = 9$ cm.
Dar $A_1S \cdot AC = 30 \Rightarrow A_1S = \frac{10}{3}$. Atunci $5 = A_1O < A_1S = \frac{10}{3}$ - fals.

12.3. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 3I_2 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Așa cum $B^2 = -4B$, deducem că $B^{k+1} = (-1)^k 4^k B$.
Atunci $A^n = (3I_2 + B)^n = C_n^0 3^n I_2 + C_n^1 3^{n-1} B + C_n^2 3^{n-2} B^2 + C_n^3 3^{n-3} B^3 + \cdots + C_n^n B^n =$
$C_n^0 3^n I_2 + C_n^1 3^{n-1} B + C_n^2 3^{n-2}(-4)B + C_n^3 3^{n-3}(-4)^2 B + \cdots + C_n^n (-4)^{n-1} B =$
$C_n^0 3^n I_2 - \frac{1}{4} B[C_n^1 3^{n-1}(-4) + C_n^2 3^{n-2}(-4)^2 + C_n^3 3^{n-3}(-4)^3 + \cdots + C_n^n (-4)^n + C_n^0 3^n - C_n^0 3^n]$

$$= C_n^0 3^n I_2 - \frac{1}{4} B[(3-4)^n - 3^n] = 3^n I_2 + \frac{3^n - (-1)^n}{4} B$$
$$= 3^n I_2 + \frac{3^n - (-1)^n}{4} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

12.4. $a_n = (x \ln^n x)\big|_1^e - \int_1^e \frac{x \cdot n \cdot \ln^{n-1} x}{x}\, dx = e - n a_{n-1}$.

Avem că: $\ln^n x < \ln^{n-1} x$, $\forall x \in [1; e]$, ceea ce implică: $a_n < a_{n-1}$.
Astfel, $e - n a_{n-1} = a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow (n+1)a_{n-1} > e \Leftrightarrow a_{n-1} > \frac{e}{n+1} \Rightarrow a_n > \frac{e}{n+2}$.
Totodată $a_n < a_{n-1} \Rightarrow -n a_n > -n a_{n-1} \Rightarrow e - n a_n > e - n a_{n-1} \Rightarrow e - n a_n > a_n$

$$\Rightarrow (n+1) a_n < e \Rightarrow a_n < \frac{e}{n+1} \Rightarrow \frac{e}{n+2} < a_n < \frac{e}{n+1}.$$

De unde rezultă: $\frac{e \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}}{\ln n} < \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\ln n} < \frac{e \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}}{\ln n}$.
Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+3}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1.$$

Prin analogie, obținem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}}{\ln n} = 1.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\ln n} = e.$$

Barem de corectare

PROBLEMA 12.1.	Punctaj acordat
Evidențierea pătratului perfect $\left(2x^2 - xe^{x^2}\right)^2$	1 punct
$\sqrt{\left(2x^2 - xe^{x^2}\right)^2} = \left\|2x^2 - xe^{x^2}\right\|$	1 punct
Argumentarea că $e^{x^2} > 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$	1 punct
Obținerea $\left\|2x^2 - xe^{x^2}\right\| = xe^{x^2} - 2x^2$	1 punct
Determinarea unei primitive a funcției $x \to xe^{x^2} - 2x^2$	2 puncte
Aplicarea formulei Newton-Leibniz și calcularea valorii integralei	1 punct
Total	7 puncte

PROBLEMA 12.2.	Punctaj acordat
Desen corect și argumentarea, că proiecția vârfului A al bazei (ce aparține muchiei comune a fețelor laterale cu arii egale) pe cealaltă bază aparține bisectoarei unghiului format de dreptele AB și AC	1 punct
Obținerea în cazul $O \in AK$: $25 + OS^2 = \frac{900}{AB^2}$.	1 punct
Demonstrarea că fața laterală cu aria de 45 cm^2 este dreptunghi	1 punct
Obținerea $25 + 4OS^2 = \frac{2025}{AB^2}$	1 punct
Determinarea $AB = \sqrt{21}$ cm	1 punct
Argumentarea cazul $O \notin AK$ este imposibil	2 puncte
Total	7 puncte

PROBLEMA 12.3.	Punctaj acordat
Scrierea $A = 3I_2 + \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	2 puncte
$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{k+1} = (-1)^k 4^k \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	2 puncte
Dezvoltarea binomului $\left(3I_2 + \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right)^n$	1 punct
Obținerea $A^n = 3^n I_2 + \frac{3^n - (-1)^n}{4}\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	2 puncte
Total	7 puncte
Notă: (Metoda șirurilor recurente)	
$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -\frac{3}{4} b_n & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$	1 punct
Obținerea sistemului $\begin{cases} a_{n+1} = -3a_n - 3b_n, \\ b_{n+1} = 4a_n + 5b_n \end{cases}$	1 punct

PROBLEMA 12.4.	Punctaj acordat
Obținerea $a_n = e - na_{n-1}$	1 punct
Obținerea $a_n < a_{n-1}$	1 punct
$a_n > \dfrac{e}{n+2}$	1 punct
Obținerea $a_n < \frac{e}{n+2}$	1 punct
Calcularea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}}{\ln n} = 1$	2 puncte
Obținerea valorii limitei egale cu *e*	1 punct
Total	7 puncte