A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 3 – 6 martie 2017

Clasa a XII-a, ziua a doua

SOLUȚII:

12.5.

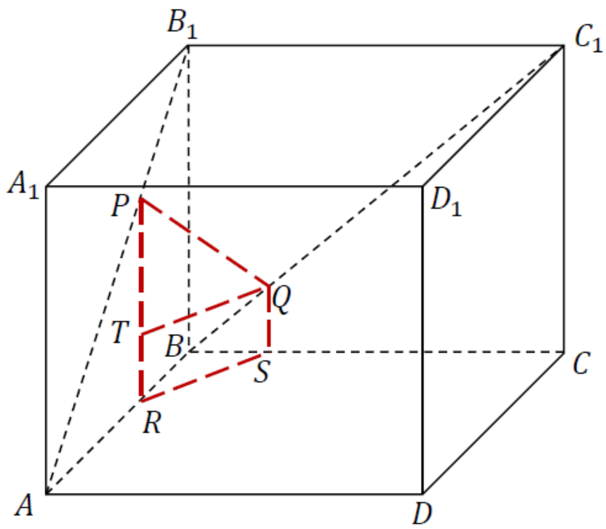
$$\int \frac{x^2+1}{x^4+4x^3+3x^2-4x+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+4x+3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{x}\right)+5}dx = \int \frac{\left(x-\frac{1}{x}+2\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}+2\right)^2+1}dx$$

$$= arctg\left(x-\frac{1}{x}+2\right)+C.$$

Atunci $F\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right) = arctg\,3 - arctg\frac{1}{2} = arctg\left(\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}\right) = arctg(1) = \frac{\pi}{4}.$

12.6.



Considerăm segmentul PQ, astfel încât $P \in (AB_1)$, $Q \in (BC_1)$. Fie R proiecția punctului P pe (ABC), S proiecția punctului Q pe (ABC). Avem $R \in (AB)$, $S \in (BC)$. Fie $x = BR, y = BS$, $x, y \in (0;1)$. Atunci $PQSR$ - trapez, în care $PR = 1-x$,

$RS = \sqrt{x^2+y^2}$, $SQ = y$.

Fie $QS < PR$ și $T \in (PR)$, astfel încât $QT \parallel RS$. Atunci $x+y<1$,

$m(\angle PQT) = 45° \Rightarrow QT = PT$

$\Leftrightarrow (x+y-1)^2 = x^2+y^2.$

Așa cum $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, din ultima egalitate obținem $(x+y)^2 \le 2(x+y-1)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4(x+y) + 2 \ge 0$, care, în condiția $0 < x+y < 1$, implică $x+y \in (0;\ 2-\sqrt{2}\,]$. Atunci, aplicând teorema Pitagora în triunghiul PTQ, obținem $PQ = \sqrt{x^2+y^2+(x+y-1)^2} = \sqrt{2}|x+y-1| = \sqrt{2}(1-(x+y)) \ge \sqrt{2}(1-2+\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2}.$

Dacă însă $QS > PR$, $1 < x+y < 2$. Aplicând raționamentele de mai sus, obținem $(x+y)^2 - 4(x+y) + 2 \ge 0$ - relație imposibilă. Deci lungimea minimă a segmenului este egală cu $(2-\sqrt{2})$ m.

12.7.

Matricea M este inversabilă $\Leftrightarrow detM \ne 0$.

$$detM = \begin{vmatrix} a & b & c \\ bc & ac & ab \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3c + c^3b + b^3a - abc^2 - a^2bc - b^2ac$$

$$= (a^3c + ab^2c - ab^2c) + (c^3b + cba^2 - cba^2) + (b^3a + bac^2 - bac^2) - abc^2 - a^2bc - b^2ac.$$

Pentru orice numere reale pozitive a, b, c au loc:

$a^3c + ab^2c \geq 2a^2bc$, cu "=" $\Leftrightarrow a^3c = ab^2c \Leftrightarrow a = b$;

$c^3b + cba^2 \geq 2abc^2$, cu "=" $\Leftrightarrow c^3b = ca^2b \Leftrightarrow c = a$;

$b^3a + bc^2a \geq 2b^2ac$, cu "=" $\Leftrightarrow b^3a = ac^2b \Leftrightarrow b = c$.

Atunci, pentru orice numere reale pozitive a, b, c distincte două câte două are loc:

$detM > (2a^2bc - ab^2c) + (2abc^2 - cba^2) + (2b^2ac - bac^2) - abc^2 - a^2bc - b^2ac = 0$.

Deci $detM > 0$, ceea ce implică M – inversabilă.

12.8.

Fie $F: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. F este o primitivă a funcției f. Așa cum $F(0) = 0$, obținem $F(x) + F'(x) = \frac{\cos x \cdot e^{-x}}{e^{-x} + \sin x + \cos x} \Leftrightarrow e^x F(x) + e^x F'(x) = \frac{\cos x}{e^{-x} + \sin x + \cos x} \Leftrightarrow$ $\left(e^x F(x)\right)' = \frac{\cos x}{e^{-x} + \sin x + \cos x}$. Deci $e^x F(x)$ este o primitivă a funcției $\frac{\cos x}{e^{-x} + \sin x + \cos x}$.

$\int \frac{\cos x}{e^{-x} + \sin x + \cos x} dx = \int \frac{e^x \cos x}{1 + e^x (\sin x + \cos x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(1 + e^x (\sin x + \cos x))'}{1 + e^x (\sin x + \cos x)} dx =$ $\frac{1}{2} \ln(1 + e^x (\sin x + \cos x)) + C$.

Atunci $F(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \ln(1 + e^x (\sin x + \cos x)) + Ce^{-x}$.

$F(0) = 0$ implică $C = -\frac{1}{2} \ln 2$.

Deci $F(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \ln(1 + e^x (\sin x + \cos x)) - \frac{1}{2} \ln 2$.

Iar $f(x) = F'(x) = -\frac{e^{-x}}{2} \left(\ln(1 + e^x (\sin x + \cos x)) - \frac{2e^x \cos x}{1 + e^x (\sin x + \cos x)} \right)$.

Barem de corectare

PROBLEMA 12.5.	Punctaj acordat
Obținerea integralei $\int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + 4x + 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} dx$	1 punct
$x^2 + 4x + 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + 5$	1 punct
$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + 5 = \left(x - \frac{1}{x} + 2\right)^2 + 1$	1 punct
$\left(x - \frac{1}{x} + 2\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$	1 punct
Obţinerea $F(x) = arctg\left(x - \frac{1}{x} + 2\right) + C$	1 punct
$F\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = arctg\, 3 - arctg\, \frac{1}{2}$	1 punct

Obținerea valorii $\frac{\pi}{4}$	1 punct
Total	7 puncte

PROBLEMA 12.6.	Punctaj acordat
Identificarea proiecţiei RS a segmentului PQ pe planul (ABC), $R \in (AB)$, $S \in (BC)$.	1 punct
Obținerea în cazul $QS < PR, x + y < 1$, a relației $(x + y - 1)^2 = x^2 + y^2,\ x = BR, y = BS$	1 punct
$(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$	1 punct
Obținerea $(x + y)^2 - 4(x + y) + 2 \geq 0$	1 punct
Obținerea $x + y \in (0;\ 2 - \sqrt{2}\,]$	1 punct
Obținerea valorii minime $(2 - \sqrt{2)}$ m	1 punct
Argumentarea că $QS > PR$ este caz imposibil	1 punct
Total	7 puncte

PROBLEMA 12.7.	Punctaj acordat
Matricea M este inversabilă $\Leftrightarrow detM \neq 0$	1 punct
Calcularea lui $detM$	1 punct
$a^3c + ab^2c \geq 2a^2bc,\ c^3b + cba^2 \geq 2abc^2,\ \ b^3a + bc^2a \geq 2b^2ac$	3 puncte
Obținerea că $detM \geq 0$, oricare ar fi *a, b, c* reale	1 punct
Obținerea că $detM > 0$, în cazul numerelor distincte *a, b, c*	1 punct
Total	7 puncte
PROBLEMA 12.8.	Punctaj acordat
$F(x) = \int_0^x f(t)dt$ - primitivă a funcției f și obținerea $F(x) + F'(x) = \frac{\cos x \cdot e^{-x}}{e^{-x} + \sin x + \cos x}$	1 punct
Înmulțirea cu e^x și obținerea $\left(e^x F(x)\right)' = \frac{\cos x}{e^{-x} + \sin x + \cos x}$.	2 puncte
Determinarea unei primitive a funcției $x \rightarrow \frac{\cos x}{e^{-x} + \sin x + \cos x}$	2puncte
Determinarea lui F în condiția $F(0) = 0$	1 punct
Obținerea lui f	1 punct
Total	7 puncte