***Ministerul Educației al Republicii Moldova***

***Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare***

# *A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA*

*Chişinău, 3 – 6 martie 2017*

Clasa a XII-a, ziua a doua

**12.5.** Fie F o primitivă a funcției $f: (0;\ +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+4x^3+3x^2-4x+1}$.
Calculați $F\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)$.

**12.6.** Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cub cu muchia de 1 m. Determinați valoarea minimă a lungimii segmentului cu extremitățile pe $(AB_1)$ și $(BC_1)$ și care formează cu planul feței $ABCD$ un unghi de 45°.

**12.7.** Fie matricea $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ bc & ac & ab \\ b & c & a \end{pmatrix}$, unde $a, b, c$ sunt numere reale pozitive, distincte două câte două. Arătați că matricea $M$ este inversabilă.

**12.8.** Determinați funcțiile continue $f: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, care verifică egalitatea

$$f(x) + \int_0^x f(t)dt = \frac{\cos x \cdot e^{-x}}{e^{-x} + \sin x + \cos x} \quad \text{oricare ar fi } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

*Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.* ***MULT SUCCES!***

*Timp alocat - 4 ore astronomice*

# *61-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА*

*Кишинэу, 3 – 6 марта 2017*

XII класс, второй день

**12.5.** Пусть F - первообразная функции $f: (0;\ +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+4x^3+3x^2-4x+1}$.
Найдите $F\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)$.

**12.6.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 м. Найдите наименьшее значение длины отрезка, концы которого расположены на $(AB_1)$ и $(BC_1)$, и образующего угол $45°$ с плоскостью грани $ABCD$.

**12.7.** Дана матрица $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ bc & ac & ab \\ b & c & a \end{pmatrix}$, где $a, b, c$ попарно различные действительные положительные числа. Показать, что матрица $M$ обратима.

**12.8.** Найдите все непрерывные функции $f: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

$$f(x) + \int_0^x f(t)dt = \frac{\cos x \cdot e^{-x}}{e^{-x} + \sin x + \cos x} \quad \text{для любого } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

*Время выполнения – 4 астрономических часа* ***ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!***

*Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.*