MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA
AGENȚIA NAȚIONALĂ PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE
A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 3-7 martie 2017
Clasa a VII –a, prima zi
Soluții

<u>**7.1.**</u> Dacă $y = 0$, atunci $x + z \neq \frac{37}{16}$ deoarece $x, y \in \mathbb{N}$. Astfel avem că $y \in \mathbb{N}^*$. Transcriem ecuația sub forma $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{37}{16}$, $x + \frac{z}{yz+1} = \frac{37}{16}$. Cum $yz + 1 > z \Rightarrow \frac{z}{yz+1} \in (0;1)$. Deoarece $\frac{37}{16} = 2 + \frac{5}{16}$, obținem $x + \frac{z}{yz+1} = 2 + \frac{5}{16} \Rightarrow x = 2$ și $\frac{z}{yz+1} = \frac{5}{16}$. Din $\frac{z}{yz+1} = \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{yz+1}{z} = \frac{16}{5} \Leftrightarrow y + \frac{1}{z} = \frac{16}{5} \Leftrightarrow y + \frac{1}{z} = 3 + \frac{1}{5} \Rightarrow$ $y = 3$ și $z = 5$.

Răspuns: $x = 2, y = 3, z = 5$.

<u>**7.2.**</u> Fie $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$ cele mai mici n numere consecutive impare distincte. Avem că $1+3+5+\dots+ +2n-1 = \frac{(2n-1+1)\cdot n}{2} = n^2$. Deoarece am considerat cele mai mici n numere consecutive impare distincte, iar suma lor este n^2 și $18^2 < 360^\circ < 19^2 \Rightarrow n_{max} = 18$. În acest caz $360^\circ = 3^\circ + 5^\circ + 7^\circ + \cdots + 37^\circ$, deci unghiurile au măsurile egale cu $3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, \dots, 37^\circ$.

Răspuns: 18 *unghiuri.*

<u>**7.3.**</u> Forma generală a fiecărei fracții este $\frac{n+1}{(1+2+\dots+n)(1+2+\dots+n+1)} = \frac{1}{1+2+\dots+n} - \frac{1}{1+2+\dots+n+1}$.

Astfel avem că $1 - \frac{2}{1\cdot(1+2)} - \frac{3}{(1+2)\cdot(1+2+3)} - \dots - \frac{2017}{(1+2+\dots+2016)(1+2+\dots+2017)} =$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) - \left(\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2+3}\right) - \left(\frac{1}{1+2+3} - \frac{1}{1+2+3+4}\right) - \dots - \left(\frac{1}{1+2+3+\dots+2016} - \frac{1}{1+2+3+\dots+2017}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+2+3+\dots+2017} = \frac{1}{\frac{2017\cdot 2018}{2}} = \frac{2}{2017\cdot 2018} < \frac{2}{2017\cdot 2017} = \frac{2}{2017^2}.$$

<u>**7.4.**</u> Observăm că $2017 = 17^2 + 12^3$. Atunci $x^2 + y^3 = 2017^{2017} = 2017 \cdot 2017^{2016} = (17^2 + 12^3) \cdot 2017^{2016} = 17^2 \cdot 2017^{2016} + 12^3 \cdot 2017^{2016} = 17^2 \cdot (2017^{1008})^2 + 12^3 \cdot (2017^{672})^3 = (17 \cdot 2017^{1008})^2 + (12 \cdot 2017^{672})^3$. Astfel putem considera $x = 17 \cdot 2017^{1008}$ și $y = 12 \cdot 2017^{672}$.

MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA

AGENȚIA NAȚIONALĂ PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE

A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 3-7 martie 2017

Clasa a VII –a, prima zi

Barem de corectare

Subiectul 7.1.

Transcrie ecuația sub forma $x+\frac{z}{yz+1}=\frac{37}{16}$ și argumentează $\frac{z}{yz+1}\in(0;1)$. ....2p.

Reprezintă numărul $\frac{37}{16}=2+\frac{5}{16}$ și deduce $x=2$ iar $\frac{z}{yz+1}=\frac{5}{16}$ ....2p.

Obține din $\frac{z}{yz+1}=\frac{5}{16}$ că $\frac{yz+1}{z}=\frac{16}{5}\Leftrightarrow y+\frac{1}{z}=\frac{16}{5}$ ....1p.

Reprezintă numărul $\frac{16}{5}=3+\frac{1}{5}$ și deduce $y=3$, $z=5$..2p.

Subiectul 7.2.

Consideră cele mai mici n numere impare consecutive distincte $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$....................................1p.

Calculează suma $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$...2p.

Scrie că $18^2<360<19^2$ și deduce că $n_{max}=18$...2p.

Obține varianta $360^\circ=3^\circ+5^\circ+7^\circ+\cdots+37^\circ$ ....2p.

Subiectul 7.3.

Scrie forma generală a fiecărei fracții $\frac{n+1}{(1+2+\ldots+n)(1+2+\ldots+n+1)}$ ....1p.

Obține că $\frac{n+1}{(1+2+\ldots+n)(1+2+\ldots+n+1)}=\frac{1}{1+2+\ldots+n}-\frac{1}{1+2+\ldots+n+1}$..2p.

Obține că partea stângă a inegalității capătă forma $\frac{1}{1+2+3+\ldots+2017}$ ....2p.

Obține că $\frac{1}{1+2+3+\ldots+2017}=\frac{2}{2017\cdot 2018}$..1p.

Deduce $\frac{2}{2017\cdot 2018}<\frac{2}{2017\cdot 2017}=\frac{2}{2017^2}$ ....1p.

Subiectul 7.4.

Observă $2017 = 17^2 + 12^3$..2p.

Scrie $2017^{2017} = (17^2 + 12^3) \cdot 2017^{2016}$..1p.

Obține $17^2 \cdot 2017^{2016} = (17 \cdot 2017^{1008})^2$...1p.

Obține $12^3 \cdot 2017^{2016} = (12 \cdot 2017^{672})^3$..1p.

Deduce $x = 17 \cdot 2017^{1008}$ și $y = 12 \cdot 2017^{672}$..2p.