MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA
AGENȚIA NAȚIONALĂ PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE
A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 3-7 martie 2017

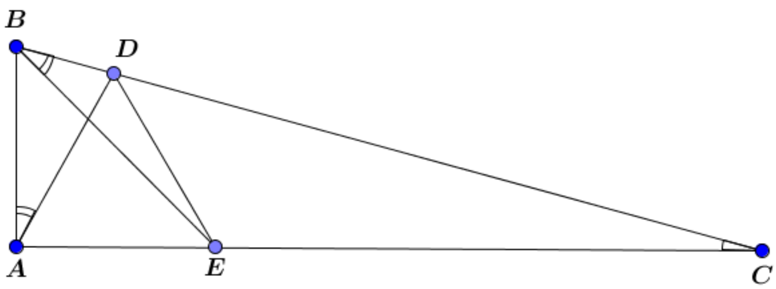
Clasa a VII –a, a doua zi

Soluții

7.5. Fie $p \in \mathbb{N}^*$ numărul de numere scrise pe un rând. Deoarece 100 se află pe rândul din mijloc, deducem că numărul de rânduri este impar. Fie $2n+1$ numărul de rânduri, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel $n \cdot p = 93$.
Analizăm cazurile:
a) $n = 1,\ p = 93$. Rezultă că în tabel sunt $93 \cdot 3 = 279$ numere;
b) $n = 3,\ p = 31$. Rezultă că în tabel sunt $31 \cdot 7 = 217$ numere;
c) $n = 31,\ p = 3$. Rezultă că în tabel sunt $3 \cdot 63 = 189$ numere, deci tabelul nu conţine numărul 193 - imposibil;
d) $n = 93,\ p = 1$. Rezultă că în tabel sunt $187 \cdot 1 = 187$ numere, imposibil din acelaşi motiv.
Astfel, în tabel sunt scrise 279 sau 217 numere.

Răspuns: 217 *sau* 279 *numere.*

7.6. $m(\measuredangle ABC) = 75^0$, deci $\measuredangle ABD \equiv \measuredangle ADB$, de unde rezultă că triunghiul ADB este isoscel, cu $AD = AB$ (**1**). Cum unghiul AEB este exterior triunghiului ECB, $m(\measuredangle AEB) = 15^0 + 30^0 = 45^0$. Obţinem că triunghiul AEB este dreptunghic isoscel, deci $AE = AB$ (**2**). Din (**1**) și (**2**) deducem că $AE = AD$, deci triunghiul AED este isoscel.



Dar cum $m(\measuredangle DAE) = 90^0 - 30^0 = 60^0$, triunghiul este echilateral, deci $DE = AB$.

7.7. Evident că numerele $1\underbrace{000\ldots00}_{2017-ori}3$ și $3\underbrace{000\ldots00}_{2017-ori}1$ sunt răsturnate unul ceilulalt. Vom demonstră că și pătratele lor sunt răsturnate unul ceilulalt. Avem:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{2017}3^2 = (10^{2018}+3)^2 = 10^{4036} + 6\cdot 10^{2018} + 9 = 1\underbrace{00\ldots0}_{4036} + 6\underbrace{00\ldots0}_{2018} + 9 = 1\underbrace{00\ldots0}_{2017}6\underbrace{00\ldots0}_{2017}9.$$

$$3\underbrace{00\ldots0}_{2017}1^2 = (3\cdot 10^{2018}+1)^2 = 9\cdot 10^{4036} + 6\cdot 10^{2018} + 1 = 9\underbrace{00\ldots0}_{4036} + 6\underbrace{00\ldots0}_{2018} + 1 = 9\underbrace{00\ldots0}_{2017}6\underbrace{00\ldots0}_{2017}1.$$

Astfel numerele $1\underbrace{000\ldots00}_{2017-ori}3$ și $3\underbrace{000\ldots00}_{2017-ori}1$ sunt *”pătrate răsturnate”*.

7.8. Din $\dfrac{2016}{a+b} = \dfrac{2017}{a+c} = \dfrac{2018}{b+c} \Rightarrow \dfrac{a+b}{2016} = \dfrac{a+c}{2017} = \dfrac{b+c}{2018} = k \Rightarrow a+b = 2016k,\ a+c = 2017k,\ b+c = 2018k$. Din ultimele trei egalități prin scădere parte cu parte, obținem $b-a=k,\ c-b=k,\ c-a=2k$. Înlocuind în $2(b-a)^2 + 4(c-b)^2 + 3(c-a)^2 = 288$, obținem $2k^2+4k^2+12k^2 = 288 \Leftrightarrow 18k^2 = 288 \Leftrightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$. Pentru $k=4$ avem $a+b = 8064,\ a+c = 8068,\ b+c = 8072$. Din ultimele trei egalități prin adunare lor, obținem $2(a+b+c) = 24204 \Rightarrow a+b+c = 12102$. Din $a+b+c = 12102$ și $a+b = 8064,\ a+c = 8068,\ b+c = 8072$ rezultă $a = 4030,\ b = 4034,\ c = 4038$.

Răspuns: $a = 4030,\ b = 4034,\ c = 4038$.

MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA
AGENȚIA NAȚIONALĂ PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE
A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 3-7 martie 2017
Clasa a VII –a, ziua a doua
Barem de corectare

Subiectul 7.5.

Deduce că numărul de rânduri este un număr impar ....1p.

Obţine egalitatea $n \cdot p = 93$, unde p – numărul de coloane ....2p.
Analizează cazul $n = 1$, $p = 93$ și obține 279 de numere...1p.

Analizează cazul $n = 3$, $p = 31$ și obține 217 de numere...1p.

Analizează cazul $n = 31$, $p = 3$ și obține 189 de numere ceea ce este imposibil.......................................1p.

Analizează cazul $n = 93$, $p = 1$ și obține 187 de numere ceea ce este imposibil.......................................1p.

Subiectul 7.6.

Obține $\measuredangle ABD \equiv \measuredangle ADB$, de unde rezultă că triunghiul ADB este isoscel, cu $AD = AB$...............................2p.

Obține că triunghiul AEB este dreptunghic isoscel, deci $AE = AB$...2p.

Deduce că triunghiul AED este isoscel...1p.

Deduce că triunghiul AED este echilateral..1p.

Deduce că $DE = AB$...1p.

Subiectul 7.7.

Scrie $1\underbrace{00\ldots0}_{2017}3^2 = (10^{2018} + 3)^2$...1p.

Scrie $(10^{2018} + 3)^2 = 10^{4036} + 6 \cdot 10^{2018} + 9$...1p.

Obține $1\underbrace{00\ldots0}_{2017}3^2 = (10^{2018} + 3)^2 = 10^{4036} + 6 \cdot 10^{2018} + 9 = 1\underbrace{00\ldots0}_{2017}6\underbrace{00\ldots0}_{2017}9$............................1p.

Scrie $3\underbrace{00\ldots0}_{2017}1^2 = (3 \cdot 10^{2018} + 1)^2$...1p.

Scrie $(3 \cdot 10^{2018} + 1)^2 = 9 \cdot 10^{4036} + 6 \cdot 10^{2018} + 1$...1p.

Obține $3\underbrace{00\ldots0}_{2017}1^2 = (3 \cdot 10^{2018} + 1)^2 = 9 \cdot 10^{4036} + 6 \cdot 10^{2018} + 1 = 9\underbrace{00\ldots0}_{2017}6\underbrace{00\ldots0}_{2017}1$..................1p.

Deduce că numerele $1\underbrace{000\ldots00}_{2017-ori}3$ și $3\underbrace{000\ldots00}_{2017-ori}1$ sunt *”pătrate răsturnate”*...1p.

Subiectul 7.8.

Obține $a+b=2016k,\ a+c=2017k,\ b+c=2018k.$...1p.

Obține $b-a=k,\ c-b=k,\ c-a=2k.$..1p.

Obține $k = 4$..2p.

Obține $a + b + c = 12102$...2p.

Obține $a=4030,\ b=4034,\ c=4038.$...1p.