Ministerul Educației al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare

A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 3 – 6 martie 2017
Clasa a VIII-a, prima zi
SOLUTII

8.1. Demonstrați că dacă $x, y \in R$ și $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 33 = 0$, atunci $x > y$.

<u>Soluţia I:</u> Adunăm în ambele părți ale egalității $4x$ și scădem în ambele părți ale egalității $4y$, obținem $(x^2 + y^2 - 2x + 4x + 12y - 4y + 33 = 4x - 4y) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2x + 8y + 33 = 4(x - y))$.
Evidențiem pătrați perfecți $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) + 16 = 4(x - y)$ obținem $(x+1)^2 + (y+4)^2 + 16 = 4(x - y)$.
Cum $(x+1)^2 + (y+4)^2 + 16 > 0$ rezultă că $4(x - y) > 0$ adică $x > y$.

<u>Soluţia_II:</u> Dacă $x = y$ obținem $(y^2 + y^2 - 2y + 12y + 33 = 0) \Leftrightarrow (y^2 + y^2 + 10y + 33 = 0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (y^2 + y^2 + 10y + 25 + 8 = 0) \Leftrightarrow (y^2 + (y+5)^2 + 8 = 0)$ contradicție deoarece $y^2 + (y+5)^2 + 8 > 0$.
Dacă $x < y$ obținem $y - x > 0$ și $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 33 =$
$= x^2 + y^2 + 10y + 25 + 2(y - x) + 8 = x^2 + (y+5)^2 + 2(y - x) + 8 > 0$.
Deci, rămâne unica posibilitate $x > y$.

8.2. Dacă a, b, c, d sunt numere reale pozitive astfel încât $ab = 2$ și $cd = 27$, aflați valoarea minimă a expresiei $E = (a+1)(b+2)(c+3)(d+4)$.

<u>Soluţie:</u> Avem $(c+3)(d+4) = cd + 4c + 3d + 12 = 39 + 4c + 3d$.
Din inegalitatea mediilor $4c + 3d \geq 2\sqrt{4c \cdot 3d} = 2\sqrt{12cd} = 2\sqrt{12 \cdot 27} = 36$.
Deci, $(c+3)(d+4) \geq 39 + 36 = 75$, cu egalitate dacă

$$\begin{cases} 4c = 3d \\ cd = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{3}{4}d \\ \dfrac{3}{4}d^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{9}{2} \\ d = 6 \end{cases}$$

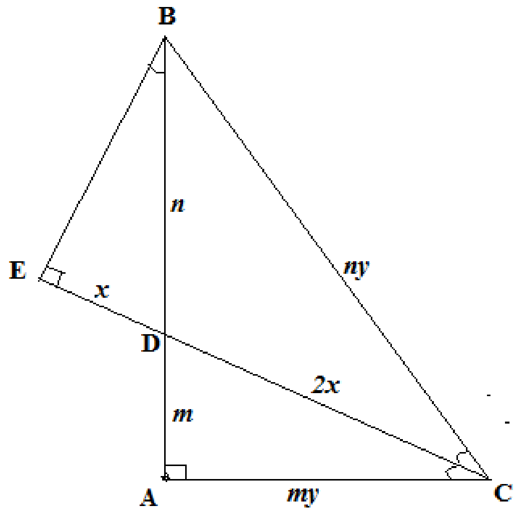
Tot din inegalitatea mediilor $(a+1)(b+2) = 4 + 2a + b \geq 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{2b} = 4\sqrt{2 \cdot ab} = 8$, cu egalitate dacă $a = 1,\ b = 2,$ care satisfac condiția $ab = 2$.

Astfel, obținem $E = (a+1)(b+2)(c+3)(d+4) \geq 8 \cdot 75 = 600$ și această valoare se atinge pentru $a = 1,\ b = 2,\ (ab = 2),\ c = \dfrac{9}{2},\ d = 6\ (cd = 27)$.

Deci, minimul expresiei E este 600.

8.3. În triunghiul ABC cu $m(<A) = 90^{O}$ construim bisectoarea CD a unghiului $ACB, D \in (AB)$ și $BE \perp CD,\ E \in CD$. Știind că $CD = 2 \cdot DE$, aflați măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului ABC.

Soluție:



Fie $DE = x,\ CD = 2x,\ AD = m,\ BD = n$. Din teorema bisectoarei $\Rightarrow \dfrac{BC}{n} = \dfrac{AC}{m} := y \Rightarrow BC = ny,\ AC = my$.

$\Delta BED \sim \Delta CAD$ **(UU)** $\Rightarrow \dfrac{n}{2x} = \dfrac{x}{m} \Leftrightarrow mn = 2x^2$ și

$m(<ACD) = m(<BCE) = m(<EBD) := \alpha$ ..

$\Delta BEC \sim \Delta DAC$ **(UU)** $\Rightarrow \dfrac{ny}{2x} = \dfrac{3x}{my} \Leftrightarrow mny^2 = 6x^2$. Din

(2) și (3) $\Rightarrow y^2 = 3$.

Din ΔABC prin aplicarea teoremei Pitagora

obținem $(m+n)^2 + m^2y^2 = n^2y^2 \Leftrightarrow (m+n)^2 = (n^2 - m^2)y^2 \Leftrightarrow (m+n) = (n-m)y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m+n) = 3(n-m) \Leftrightarrow 4m = 2n \Leftrightarrow n = 2m$. Din (2) $\Rightarrow m = x$.

Din $\Delta DAC \Rightarrow\ AD = \dfrac{1}{2}DC \Rightarrow m(<DCA) = 30^{O} \Rightarrow m(<C) = 60^{O}, m(<B) = 30^{O}$.

8.4. Determinați toate funcțiile $f, g : R \to R$, știind că

$f(x+4) + 2g(2x+7) = \dfrac{x+3}{2}$. și $f(\dfrac{x+3}{2}) + g(x+2) = x+6$.

Soluție: Fie $f(\dfrac{x+3}{2}) + g(x+2) = x+6,\ \forall x \in R$. Schimbăm aici x cu $2x+5$. Avem

$f(x+4) + g(2x+7) = 2x+11$.

Cum $f(x+4) + 2g(2x+7) = \dfrac{x+3}{2}$, prin scădere obținem

$g(2x+7) = \dfrac{x+3}{2} - 2x - 11 = \dfrac{-3x-19}{2} = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{19}{2}$.

Notăm $t = 2x+7$, atunci $x = \dfrac{t-7}{2} \Rightarrow g(t) = -\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{t-7}{2} - \dfrac{19}{2} = -\dfrac{3}{4}t + \dfrac{21}{4} - \dfrac{19}{2} =$

$= -\dfrac{3}{4}t - \dfrac{17}{4}$, sau $g(x) = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{17}{4}$.

Atunci din (1) și (2) obținem $f(x+4) = 2x+11 - g(2x+7) = 2x+11 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{19}{2} = \dfrac{7}{2}x + \dfrac{41}{2}$.

Notăm $t = x+4$, atunci $x = t-4 \Rightarrow f(t) = \dfrac{7}{2}(t-4) + \dfrac{41}{2} = \dfrac{7}{2}t + \dfrac{13}{2}$, sau

$f(x) = \dfrac{7}{2}x + \dfrac{13}{2}$. Răspuns $f(x) = \dfrac{7}{2}x + \dfrac{13}{2}$ și $g(x) = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{17}{4}$.

Olimpiada de Matematică a Republicii Moldova
04 martie 2017, clasa a VIII-a, prima zi
Bareme oficiale de evaluare a problemelor

8.1. Demonstrați că dacă $x, y \in R$ și $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 33 = 0$, atunci $x > y$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obține relația $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 4$	1 punct
2.	Concluzia că $\begin{cases} (x-1)^2 \le 4 \\ (y+6)^2 \le 4 \end{cases}$.	1 punct
3.	Scrie $\begin{cases} y < -8 \Rightarrow (y+6)^2 > 4 \\ y > -4 \Rightarrow (y+6)^2 > 4 \end{cases}$ cu concluzia că $y \in [-8, -4]$	2 puncte
4.	Scrie $\begin{cases} x < -1 \Rightarrow (x-1)^2 > 4 \\ x > 3 \Rightarrow (x-1)^2 > 4 \end{cases}$ cu concluzia că $x \in [-1, 3]$	2 puncte
5.	Din 3. și 4. rezultă $x > y$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

8.2. Dacă a, b, c, d sunt numere reale pozitive astfel încât $ab = 2$ și $cd = 27$, aflați valoarea minimă a expresiei $E = (a+1)(b+2)(c+3)(d+4)$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	A aplicat $ab = 2$ și a obținut $(a+1)(b+2) = 4 + 2a + b$	1 punct
2.	A aplicat $cd = 27$ și a obținut $(c+3)(d+4) = 39 + 4c + 3d$	1 punct

3.	A aplicat inegalitatea mediilor pentru $(a+1)(b+2)$: $(a+1)(b+2) \geq 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{2b} = 4\sqrt{2ab} = 4\sqrt{4} = 8$	1 punct
4.	A aplicat inegalitatea mediilor pentru $(c+3)(d+4)$: $(c+3)(c+4) = 39+4c+3d \geq 39+2\sqrt{4c \cdot 3d} = 39+2\sqrt{12 \cdot 27} = 39+36 = 75$	1 punct
5.	A obținut $E \geq 8 \cdot 75 = 600$	1 punct
6.	A dedus că valoarea minimă se obține pentru $a=1$ și $b=2$	1 punct
7.	A dedus că valoarea minimă se obține pentru $c=4{,}5$ și $d=6$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte

8.3. În triunghiul ABC cu $m(<A) = 90^{o}$ construim bisectoarea CD a unghiului $ACB, D \in (AB)$ și $BE \perp CD, E \in CD$. Știind că $CD = 2 \cdot DE$, aflați măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului ABC.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Aplică teorema bisectoarei şi scrie $\frac{BC}{n} = \frac{AC}{m} := y \Rightarrow BC = ny,\ AC = my$	1 punct
2.	Scrie $\Delta BED \sim \Delta CAD$ **(UU)** $\Rightarrow \frac{n}{2x} = \frac{x}{m} \Leftrightarrow mn = 2x^2$ şi $m(<ACD) = m(<BCE) = m(<EBD)) := \alpha$.	1 punct
3.	Obţine $\Delta BEC \sim \Delta DAC$ **(UU)** $\Rightarrow \frac{ny}{2x} = \frac{3x}{my} \Leftrightarrow mny^2 = 6x^2$. Din (2) şi (3) $\Rightarrow y^2 = 3.$	2 puncte
4.	Din ΔABC Teorema Pitagora $(m+n)^2 + m^2y^2 = n^2y^2 \Leftrightarrow (m+n)^2 = (n^2-m^2)y^2 \Leftrightarrow (m+n) = (n-m)y^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (m+n) = 3(n-m) \Leftrightarrow 4m = 2n \Leftrightarrow n = 2m$. Din (2) $\Rightarrow m = x$.	2 puncte

5.	$\Delta DAC \Longrightarrow AD = \frac{1}{2}DC \Rightarrow m(<DCA) = 30^{O} \Rightarrow m(<C) = 60^{O}, m(<B) = 30^{O}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

8.4. Determinați toate funcțiile $f, g : R \rightarrow R$, știind că $f(x+4) + 2g(2x+7) = \frac{x+3}{2}$. și $f(\frac{x+3}{2}) + g(x+2) = x+6$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Schimbă x cu $2x+5$.	1 punct
2.	Obține $f(x+4) + g(2x+7) = 2x+11$.	1 punct
3.	Obține $g(2x+7) = -\frac{3}{2}x - \frac{19}{2}$	1 punct
4.	Obține $g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{17}{4}$	2 puncte
5.	Obține $f(x+4) = \frac{7}{2}x + \frac{41}{2}$.	1 punct
6.	Obține $f(x) = \frac{7}{2}x + \frac{13}{2}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.