A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 3 – 6 martie 2017

Clasa a VIII-a, a doua zi SOLUTII

8.5. Determinaţi numerele $x, y \in R$ pentru care $3x = 2y + \frac{3}{y}$ şi $3y = 2x + \frac{3}{x}$.

Soluţie: 8.5.: **(1)** Observăm că $x \neq 0,\ \ y \neq 0$. Adunăm egalităţile parte cu parte obţinem:

$$(3x + 3y = 2x + 2y + \frac{3}{x} + \frac{3}{y}) \Leftrightarrow (x + y = \frac{3}{x} + \frac{3}{y}) \Leftrightarrow$$

(2) $\Leftrightarrow (x + y = \frac{3(x+y)}{xy}) \Leftrightarrow (\frac{x+y}{3} = \frac{x+y}{xy}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ xy = 3 \end{array}\right.$

(3) Din $x + y = 0$ rezultă $y = -x$. Substituind aceasta în egalitatea $3y = 2x + \frac{3}{x}$ obţinem

$$(-3x = 2x + \frac{3}{x}) \Leftrightarrow (-5x = \frac{3}{x}) \Leftrightarrow (x^2 = -\frac{3}{5}) \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

(4) Dacă $xy = 3$, atunci înmulţind egalitatea $3y = 2x + \frac{3}{x}$ cu x obţinem

$(3xy = 2x^2 + 3) \Leftrightarrow (9 = 2x^2 + 3) \Leftrightarrow (x^2 = 3) \Leftrightarrow (x \in \{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\})$. Din $xy = 3$ obţinem $y \in \{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\}$. Deci soluţia este: $(x, y) \in \{(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3}),\ (\sqrt{3},\ \sqrt{3})\}$.

8.6. Fie mulţimea $A = [-2, 3] \setminus Z$ şi $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \subset A$ o submulţime oarecare a sa.

a) Demonstraţi că $-12 \leq [x_1] + [x_2] + [x_3] + [x_4] + [x_5] + [x_6] \leq 12$.

b) Arătaţi că există $i \neq j,\ i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ astfel încât $[|x_i - x_j|] = 0$. Am notat $|a|$ modulul lui a şi $[a]$ partea întreagă a lui a.

Soluţie: 8.6 **(1)** a) $(x_i \in A) \Leftrightarrow (-2 < x_i < 3) \Leftrightarrow (-2 \leq [x_i] \leq 2,\ \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ şi,

(2) adunând aceste inegalităţi duble parte cu parte, obţinem

$-12 \leq [x_1] + [x_2] + [x_3] + [x_4] + [x_5] + [x_6] \leq 12$.

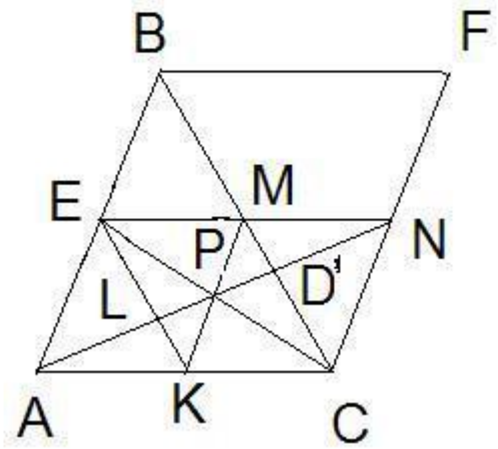
(3) b) Mulţimea A este reuniunea a 5 intervale de lungime egală cu 1, oricare două dintre ele fiind disjuncte: $A = (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$.

(4) Conform principiului cutiei, există cel puţin două numere x_i, x_j $i \neq j,\ i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pentru care există $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ astfel încât $x_i, x_j \in (m, m+1)$.

(5) Din $x_i, x_j \in (m, m+1)$ rezultă că distanţa pe axa numerică dintre punctele cu coordonatele x_i, x_j este < 1, deci $0 \leq |x_i - x_j| < 1$ şi astfel $[|x_i - x_j|] = 0$.

8.7. În triunghiul oarecare $ABC,\ D \in (BC)$ şi $E \in (AB)$ astfel încât $BC = 3 \cdot CD$ şi $AB = 2 \cdot AE$. Dacă P este mijlocul lui $[CE]$, arătaţi că punctele A, P, D sunt coliniare.

Soluţie: 8.7.:



(1) . Fie punctul F astfel încât $CF \parallel AB,\ BF \parallel AC$. Rezultă că $ABFC$ este paralelogram şi, deci, $CF = AB,\ BF = AC$.

(2) Fie punctul $N \in CF$ astfel încât $EN \parallel AC$. Notăm $\{M\} = EN \cap BC$. În triunghiul ABC avem $BE = EA$ şi $EM \parallel AC$ rezultă că $BM = MC$. În triunghiul BFC avem $BM = MC$ şi $MN \parallel BF$ rezultă că $FN = NC$.

(3) Patrulaterul $AENC$ este paralelogram şi deci $EN = AC$. Astfel obţinem că $\{P\} = EC \cap AN$ ca punct de intersecţie a diagonalelor.

(4) Fie $\{D'\} = AN \cap MC$. Trasăm $EK \parallel MC,\ K \in AC$. Obţinem $EMCK$ paralelogram şi, deci, $\{P\} = EC \cap MK$ ca punct de intersecţie a diagonalelor, deci $MP = PK$.

(5) Notăm $\{L\} = EK \cap AN$ Avem $\Delta KPL \equiv \Delta MPD'$ (ULU), deci $MD' = LK$. Cum $EK = MC$ şi $MD' = LK$, rezultă că $EL = CD'$.

(6) Avem $MN = EM$ ca linii medii în ΔABC şi ΔBFC, respectiv, cu $BF = AC$. Deci, în ΔELN avem MD' linie medie, deci $MD' = \frac{1}{2}EL = \frac{1}{2}CD' = \frac{1}{3}CM$.

(7) Din ipoteză obţinem că $BD = 2 \cdot DC$, deci, de asemenea $MD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}CM$. Deci, $D \equiv D'$. Astfel avem că $A,\ P,\ D$ sunt coliniare.

8.8. Fie numerele fixate $a, b, c > 0$ şi numerele nenule $x,\ y,\ z$ astfel încât $ax + by + cz = 0$. Să se arate că expresia

$$E(x,y,z) = \frac{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}{ax^2 + by^2 + cz^2}$$

nu depinde de $x,\ y,\ z$.

Soluţie: 8.8 **(2)**

$$ax+by+cz=0 \Rightarrow \begin{cases} by+cz=-ax \\ ax+cz=-by \\ ax+by=-cz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2y^2+2bcyz+c^2z^2=a^2x^2 \\ a^2x^2+2acxz+c^2z^2=b^2y^2 \\ a^2x^2+2abxy+b^2y^2=c^2z^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2y^2-a^2x^2+c^2z^2=-2bcyz \\ a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2=-2acxz \\ a^2x^2-c^2z^2+b^2y^2=-2abxy \end{cases}$$

(1) $bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2=$

$=bcy^2-2bcyz+bcz^2+caz^2-2cazx+cax^2+abx^2-2abxy+aby^2=$

(3) $=bcy^2+b^2y^2-a^2x^2+c^2z^2+bcz^2+caz^2+a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2+cax^2+abx^2+$

$+a^2x^2-c^2z^2+b^2y^2+aby^2=bcy^2+c^2z^2+bcz^2+caz^2+cax^2+$

$+abx^2+a^2x^2+b^2y^2+aby^2=$

(4) $=a^2x^2+aby^2+caz^2+bcy^2+bcz^2+abx^2+c^2z^2+cax^2+b^2y^2=a(ax^2+by^2+$

$+cz^2)+b(ax^2+by^2+cz^2)+c(ax^2+by^2+cz^2)=(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)$

(5) $\Rightarrow E(x,y,z)=\dfrac{(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)}{ax^2+by^2+cz^2}=a+b+c$

Olimpiada de Matematică a Republicii Moldova
05 martie 2017, clasa a VIII-a, a doua zi
Bareme oficiale de evaluare a problemelor

8.5. Determinaţi numerele $x, y \in R$ pentru care $3x=2y+\frac{3}{y}$ şi $3y=2x+\frac{3}{x}$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Scrierea condiţiei $x \neq 0,\ y \neq 0$	1 punct
2.	Adunarea egalităţilor şi obţinerea condiţiei $\frac{x+y}{3}=\frac{x+y}{xy}$.	2 punct

3.	Scrierea condiţiei $\left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ xy=3 \end{array}\right.$.	1 puncte
4.	Cercetarea cazului $x+y=0$ şi obţinerea egalităţii $x^2=-\frac{3}{5}$, deci $x\in\varnothing$.	1 puncte
5.	Cercetarea cazului $xy=3$ cu obţinerea soluţiei $(-\sqrt{3},-\sqrt{3}),\ (\sqrt{3},\sqrt{3})$	2 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

8.6. Fie mulţimea $A=[-2,\ 3]\setminus Z$ şi $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}\subset A$ o submulţime oarecare a sa.
a) Demonstraţi că $-12\le[x_1]+[x_2]+[x_3]+[x_4]+[x_5]+[x_6]\le 12$.
b) Arătaţi că există $i\ne j,\ i,j\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ astfel încât $[|x_i-x_j|]=0$. Am notat $|a|$ modulul lui a şi $[a]$ partea întreagă a lui a.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obţinerea inegalităţii $-2\le[x_i]\le 2,\ \forall i\in\{1,2,3,4,5,6\}$.	1 punct
2.	Demonstrarea inegalităţii $-12\le[x_1]+[x_2]+[x_3]+[x_4]+[x_5]+[x_6]\le 12$.	1 punct
3.	Scrierea egalităţii $A=(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,3)$.	2 puncte
4.	Aplicarea principiului cutiei	2 puncte
5.	Argumentarea relaţiei $[|x_i-x_j|]=0$ pentru $\forall x_i,x_j\in(m,m+1), m\in\{-2,-1,0,1,2\}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte

8.7. În triunghiul oarecare ABC, $D \in (BC)$ şi $E \in (AB)$ astfel încât $BC = 3 \cdot CD$ şi $AB = 2 \cdot AE$. Dacă P este mijlocul lui $[CE]$, arătaţi că punctele A, P, D sunt coliniare.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Construirea paralelogramului $ABFC$	1 punct
2.	Construirea paralelogramului $AENC$ şi demonstrarea egalităţilor $BM = MC$ şi $FN = NC$.	1 punct
3.	Argumentarea că P este punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului $AENC$.	1 punct
4.	Construirea paralelogramului $EMCK$, demonstrarea că P este punctul de intersecţie a diagonalelor acestui paralelogram, obţinerea egalităţii $MP = PK$.	1 punct
5.	Obţinerea egalităţii $EL = CD'$.	1 punct
6.	Obţinerea egalităţii $MD' = \frac{1}{3}CM$.	1 punct
7.	Obţinerea egalităţii $MD = \frac{1}{3}CM$, concluziei că $D = D'$ şi că A, P, D sunt coliniare.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

8.8. Fie numerele fixate $a, b, c > 0$ şi numerele nenule x, y, z astfel încât $ax + by + cz = 0$. Să se arate că expresia $$E(x,y,z) = \frac{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}{ax^2 + by^2 + cz^2}$$ nu depinde de x, y, z.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Calcularea $(ax + by + cz)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(axby + axcz + bycz) = 0$.	1 punct

2.	Exprimarea $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=-2(axby+axcz+bycz)$.	1 punct
3.	Ridicarea la putere şi desfacerea parantezelor cu obţinerea $bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2=\Lambda=$ $bcy^2+bcz^2+caz^2cax^2+abx^2+aby^2-2(bcyz+cazx+abxy)$	1 punct
4.	Substituirea $-2(bcyz+cazx+abxy)=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$ şi obţinerea egalităţii $E(x,y,z)=\dfrac{ax^2(a+b+c)+by^2(a+b+c)+cz^2(a+b+c)}{ax^2+by^2+cz^2}$	1 punct
5.	Obţinerea egalităţii $E(x,y,z)=\dfrac{(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)}{ax^2+by^2+cz^2}$	1 punct
6.	Obţinerea egalităţii $E(x,y,z)=a+b+c$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.