

**A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA**

Chișinău, 3 – 6 martie 2017

Clasa a VIII-a, a doua zi

**8.5.** Determinați numerele  $x, y \in R$  pentru care  $3x = 2y + \frac{3}{y}$  și  $3y = 2x + \frac{3}{x}$ .

**8.6.** Fie mulțimea  $A = [-2, 3] \setminus Z$  și  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \subset A$  o submulțime oarecare a sa.

a) Demonstrați că  $-12 \leq [x_1] + [x_2] + [x_3] + [x_4] + [x_5] + [x_6] \leq 12$ .

b) Arătați că există  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  astfel încât  $||x_i - x_j|| = 0$ . Am notat  $|a|$  modulul lui  $a$  și  $[a]$  partea întreagă a lui  $a$ .

**8.7.** În triunghiul oarecare  $ABC$ ,  $D \in (BC)$  și  $E \in (AB)$  astfel încât  $BC = 3 \cdot CD$  și  $AB = 2 \cdot AE$ .

Dacă  $P$  este mijlocul lui  $[CE]$ , arătați că punctele  $A, P, D$  sunt coliniare.

**8.8.** Fie numerele fixate  $a, b, c > 0$  și numerele nenule  $x, y, z$  astfel încât  $ax + by + cz = 0$ . Să se arate că expresia

$$E(x, y, z) = \frac{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}{ax^2 + by^2 + cz^2}$$

nu depinde de  $x, y, z$ .

*Timp alocat - 4 ore astronomice*

*Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.*

**MULT SUCCES!**

**61-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА**

Кишинэу, 3 – 6 марта 2017

VIII класс, второй день

**8.5.** Найдите числа  $x, y \in R$  для которых  $3x = 2y + \frac{3}{y}$  и  $3y = 2x + \frac{3}{x}$ .

**8.6.** Задано множество  $A = [-2, 3] \setminus Z$  и  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \subset A$  некоторое ее подмножество.

a) Докажите, что  $-12 \leq [x_1] + [x_2] + [x_3] + [x_4] + [x_5] + [x_6] \leq 12$ .

b) Покажите, что существуют  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  такие что  $||x_i - x_j|| = 0$ , где  $|a|$  обозначает модуль числа  $a$ , а  $[a]$  - целая часть числа  $a$ .

**8.7.** В произвольном треугольнике  $ABC$ ,  $D \in (BC)$  и  $E \in (AB)$ , так что  $BC = 3 \cdot CD$  и  $AB = 2 \cdot AE$ . Известно, что  $P$  середина отрезка  $[CE]$ . Докажите, что точки  $A, P, D$  коллинеарны.

**8.8.** Пусть  $a, b, c > 0$  некоторые положительные фиксированные числа и  $x, y, z$  - ненулевые числа, такие что  $ax + by + cz = 0$ . Покажите, что выражение

$$E(x, y, z) = \frac{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}{ax^2 + by^2 + cz^2}$$

не зависит от  $x, y, z$ .

*Время выполнения – 4 астрономических часа*

*Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.*

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**