MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA

AGENȚIA NAȚIONALĂ PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE

A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 03 – 06 martie 2017, clasa a IX-a, prima zi, 4 martie 2017

SOLUȚII

9.1 Considerăm mulțimile $A_{mn} = \{34 (m - 1) + n; 34 (m-1) + n + 17\}$ pentru $1 \leq m \leq 59$ și $1 \leq n \leq 17$, iar $B_k = \{2006 + k\}$ pentru $1 \leq k \leq 11$.

Ele sunt disjuncte 2 câte 2 și reuniunea lor coincide cu mulțimea {1; 2; ....; 2017}. Deoarece nu putem alege mai mult de un element din fiecare dintre ele, rezultă că nu putem alege mai mult de 59 × 17 + 11 = 1003 + 11 = 1014. Pe de altă parte, alegând din fiecare din aceste mulțimi pe cel mai mic element, căpătăm exact 1014 elemente ce satisfac condiția problemei

9.2 Notăm 3x = a și 2y = b. Deci trebuie să aflăm valoarea maximă a expresiei:

$F(a;b) = a^2 + ab + b^2 + a + b$ în condiția $a^2 + b^2 = 1$

Deoarece $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{2}$ și $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} = \sqrt{2}$, avem:

$F(a; b) = a^2 + ab + b^2 + a + b \leq 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$

Deoarece $F(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2}$,

rezultă că cea mai mare valoare numerica este $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$

9.3 Fie E punctul de intersecție al dreptelor AD si BC. Din CD = BH și $\Delta ECD \equiv \Delta ABH$ rezultă congruența triunghiurilor dreptunghice AHB si EDC. Atunci aria trapezului ABCD este egală cu aria triunghiului AHE, ipotenuza caruia este AE = AD + DE = AD + AH = 8. Fie M – mijlocul segmentului AE. Atunci MH = MA = $ME = \frac{AE}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Deci ΔEDH este isoscel şi avem:

m (ΔAMH) = m (ΔMEH) + m (ΔMHE) = 2×15º = 30º

Dacă N ∈ AE şi HN perpendicular AE rezultă că HN = $\frac{1}{2}$ MH = $\frac{1}{2}$ ×4 = 2

Deci $A_{ABCD} = A_{\Delta AHE} = \frac{AE \times HN}{2} = \frac{8 \times 2}{2} = 8$

9.4 Notăm suma prin **S.** Atunci:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \ldots + \frac{1}{1609} + \frac{1}{1610} + \frac{1}{1611} - \frac{3}{1612} + \frac{1}{1613} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{1613}\right) - \left(\frac{4}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{4}{1612}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{1613}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{403}\right) =$$

$$\frac{1}{404} + \frac{1}{405} + \ldots + \frac{1}{1612} + \frac{1}{1613} = \left(\frac{1}{404} + \frac{1}{1613}\right) + \left(\frac{1}{405} + \frac{1}{1612}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1008} + \frac{1}{1009}\right) =$$

$$2017 \cdot \sum_{k=404}^{1008} \frac{1}{k \cdot (2017 - k)}.$$

Deoarece 2017 este numar prim atunci numitorii k (2017 - k) sunt reciproc primi cu 2017. Deci, cel mai mic multiplu comun al acestor numitori - nu este multiplu de 2017. Prin urmare, numărărtorul fracției ireductibile $\frac{m}{n} = S$, va conține factorul 2017.

BAREME

9.1

a) Identifică un numar maximal de perechi disjuncte de elemente {a; b} cu proprietatea $|b\text{-}a| = 17$ **4p**

b) Completează reuniunea C a acestor mulțimi până la A= {1; 2; ...; 2017} **1p**

c) Alege câte un element din fiecare pereche si calculează numarul lor **1p**

d) Răspuns corect: 1014 **1p**

Total: 7p

Notă: Doar pentru prezentarea variantei

$\{1; 2, \ldots 17\} \cup \{35; 36; \ldots 51\} \cup \cdots \cup \{1973;\ 1974;\ \ldots 1989\} \cup \{2007;\ 2008; \ldots 2017\}$

se acordă 2 puncte

9.2

a) Pentru estimația $a \cdot b \leq \frac{1}{2}$ **2p**

b) Demonstrează inegalitatea $a+b \leq \sqrt{2}$ **2p**

c) Demonstrează inegalitatea $F(a, b) \leq \frac{3}{2}+\sqrt{2}$ **2p**

d) Arată că $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ **1p**

Total: 7p

9.3

a) Consideră {E} = AD∩BC **1p**

b) Demonstrează că Δ AHB ≡ Δ EDC **1p**

c) ABCD și AHE au aceeași arie **1p**

d) Calculează AE = 8 **1p**

e) Află $m(\angle AHM)=90^0$ **1p**

f) Calculează HN = 2 **1p**

g) Determină $A_{ABCD} = 8$ **1p**

Total: 7p

9.4

a) $S=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1613}\right)-\left(\frac{4}{4}+\frac{4}{8}+\ldots+\frac{4}{1612}\right)$ **1p**

b) $S=\frac{1}{404}+\frac{1}{405}+\ \ldots\ +\frac{1}{1612}+\frac{1}{1613}$ **1p**

c) $S=\left(\frac{1}{404}+\frac{1}{1613}\right)+\left(\frac{1}{405}+\frac{1}{1612}\right)+\ \ldots\ +\left(\frac{1}{1008}+\frac{1}{1009}\right)$ **1p**

d) $S=2017\cdot\sum_{k=404}^{1008}\frac{1}{k\cdot(2017-k)}$ **1p**

e) (k(2017 – k), 2017) = 1 **1p**

f) CMMC al numerelor k(2017 - k), k = 404; 1008,
nu este multiplu de 2017 **1p**

g) Simplificarea până la ireductibilă a fracției S,
păstrează 2017 factor la numărător **1p**