A 61-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 03 – 06 martie 2017

Clasa a *IX*-a, ziua a doua

9.5 Numerele reale diferite a și b sunt astfel, încât ecuația $(x^2+20ax+10b)(x^2+20bx+10a)=0$ n-are soluții. Demonstrați, că numărul $20(b-a)$ nu este întreg.

9.6 Dacă $x, y, z, t > 0$, demonstrați că $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{t} \geq 4(x-t)$.

9.7 În triunghiul ascuțitunghic ABC, mediana AM este mai mare decât latura AB. Demonstrați, că triunghiul ABC poate fi tăiat în trei părți din care se poate forma un romb.

9.8 Pe o masă se află 2017 monede. Doi jucători fac mișcări pe rând. La o mișcare primul poate să ia de pe masă orice număr impar de monede de la 1 la 99, al doilea – orice număr par de monede de la 2 la 100. Pierde cel care nu mai poate face mișcarea. Cine câștigă într-un joc corect?

Timp alocat - 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

***

61-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 03 – 06 марта 2017

IX класс, второй день

9.5 Различные действительные числа a и b таковы, что уравнение

$$(x^2+20ax+10b)(x^2+20bx+10a)=0$$

не имеет корней. Докажите, что число $20(b-a)$ не является целым.

9.6 Докажите, что при всех положительных x, y, z, t выполняется неравенство

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{t} \geq 4(x-t).$$

9.7 В остроугольном треугольнике ABC медиана AM длиннее стороны AB. Докажите, что треугольник ABC можно разрезать на три части, из которых складывается ромб.

9.8 На столе лежат 2017 монет. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй - любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Время выполнения – 4астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

....

Soluții

9.5 Presupunem că $20(b-a)$ este un număr întreg. Considerăm $b > a$, atunci $20(b-a) \geq 1$ sau $b - a \geq \frac{1}{20}$. Din enunț, ecuația $(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$ n-are soluții. Rezultă că ecuațiile $x^2 + 20ax + 10b = 0$ și $x^2 + 20bx + 10a = 0$ n-au soluții. În aceste condiții discriminantul fiecărei ecuații este negativ. Deci $400a^2 - 40b < 0$ și $400b^2 - 40a < 0$. Utilizând inegalitățile $400b^2 - 40a < 0$ și $b - a \geq \frac{1}{20}$ obținem $10b^2 - b + \frac{1}{20} < 0$.

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(b) = 10b^2 - b + \frac{1}{20}$. Reprezentarea grafică a funcției f este o parabolă cu ramurile orientate în direcția pozitivă a axei ordonatelor, plasată mai sus de axa absciselor. Deci $10b^2 - b + \frac{1}{20} > 0$ pentru orice număr real b. Contradicție cu concluzia $10b^2 - b + \frac{1}{20} < 0 \quad \Rightarrow$ $20(b-a)$ nu este întreg.

Dacă $a > b$, atunci $20(b-a) \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad b - a \leq -\frac{1}{20}$. În continuare, analog se obține contradicție, utilizând inegalitatea $400a^2 - 40b < 0$.

9.6 Vom arăta că pentru $x, y > 0$ este adevărată inegalitatea $\frac{x^2}{y} \geq 4(x-y)$.

Înmulțim ambii membri ai inegalității indicate cu y, atunci: $\frac{x^2}{y} \geq 4(x-y) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 4y(x-y)$ $\Leftrightarrow \quad (x-2y)^2 \geq 0$ – inegalitate adevărată.

Analog $\frac{y^2}{z} \geq 4(y-z)$ și $\frac{z^2}{t} \geq 4(z-t)$. Adunăm cele trei inegalități și obținem:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{t} \geq 4(x-y) + 4(y-z) + 4(z-t) = 4(x-t).$$

9.7 Fie N mijlocul laturii AC, iar punctul K un punct pe dreapta MN astfel încât $MK = MN$

(fig. 1).Triunghiul MNC este congruent cu triunghiul MKB (LUL). Efectuăm tăierea după linia mujlocie MN. Transferăm triunghiul MNC astfel încât el să coincidă cu triunghiul MKB. Obținem paralelogramul $ANKB$. Dacă $AN = AB$ rombul deja este obținut.

Fie $AN < AB$ (fig. 2). Construim cercul cu centrul în punctul A și raza AB. Atunci punctul N se află în interiorul cercului, iar punctul M în afara cercului cu raza AB. Din aceste considerente cercul intersectează segmentul MN într-un punct. Fie acest punct P. Tăind de la paralelogramul $ANKB$ triunghiul APN și deplasându-l în așa mod, încât segmentul AN să coincidă cu segmentul BK, vom obține romb.

Fie $AN > AB$. Deoarece triunghiul ABC este ascuțitunghic, piciorul înălțimii CH aparține segmentului (AB). În continuare, punctul T - piciorul perpendicularei din N dusă la AB, este mijlocul segmentului AH. Deci $BT > AT \Rightarrow BN > AN$. Din aceste considerente, cercul cu centrul în punctul B și raza AN, intersectează latura AN într-un punct. Fie acest punct S. Cele descrise anterior au loc deoarece punctul N este în exsteriorul acestui cerc, iar punctul A în interiorul lui (fig. 3). Tăiem de la paralelogramul $ANKB$ triunghiul ABS și deplasându-l astfel încât segmentul AB să coincidă cu segmentul NK, vom obține romb.

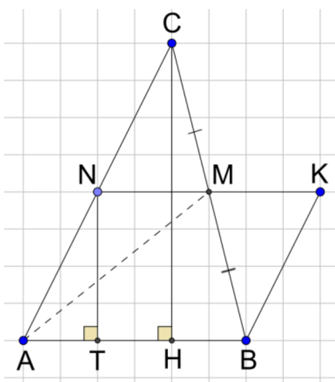

Fig. 1

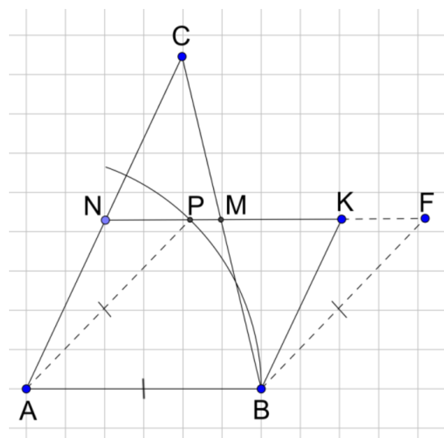

Fig. 2

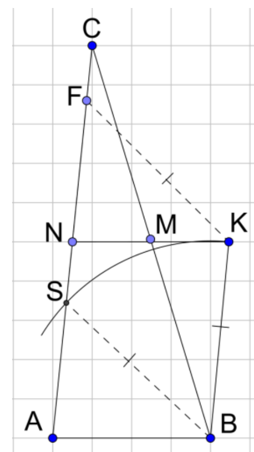

Fig. 3

9.8 Câștigă primul jucător (cel care începe jocul). Descriem strategiea de victorie a primului jucător. La prima mișcare el trebuie să ia de pe masă 97 monede. La fiecare mișcare următoare, dacă jucătoru al doilea ia x monede, atunci primul trebuie să ia $101 - x$ monede. Este posibil ca primul să facă așa mișcări, deoarece dacă x este un număr par de la 2 la 100, atunci $101 - x$ este un număr impar de la 1 la 99. Numărul 2017 poate fi scris în felul următor: $2017 = 101 \cdot 19 + 98 = 101 \cdot 19 + 97 + 1$. După ce primul a luat 97 monede, apoi jucătorii au efectuat 19 mișcări în pereche de tipul menționat mai sus, pe masă a rămas o singură monedă. Jucătorul al doilea nu poate face mișcarea următoare și pierde.