Физика. Теория. Решения

1.1.

При поднятии уровня воды сила Архимеда увеличивается до максимального значения, а затем не меняется. Давление воды плотности $\rho = 1\dfrac{g}{cm^3}$ при этом растет. Пробка не всплывет, если ее масса будет равна массе воды в объеме усеченного конуса минус объем цилиндра

1. $m = \rho\left\{\dfrac{\pi}{3}\left(R^2H - r^2h\right) - \pi r^2(H-h)\right\} = \rho\left\{\dfrac{\pi}{3^{3/2}}\left(H^3 - 3r^3\right) - \pi r^2(H - r\sqrt{3})\right\}$ =2,44 г **1,8 балла**

2. $\rho = 259\dfrac{кг}{м^3} = 0,26\dfrac{г}{см^3}$ **0,2 балла**

1.2.

Если центр шарика радиуса R движется по часовой стрелке со скоростью v_0, то скорость внутреннего кольца равна $v_1 = \omega R + v_0$ и направлена по часовой стрелке. Скорость наружного кольца направлена против часовой стрелки и равна $v_2 = \omega R - v_0$. Таким образом

a) $v_0 = \dfrac{1}{2}(v_1 - v_2) = \pi(n_1r_1 - n_2r_2)$ **1,0 балл**

Легко видеть, что шарики участвуют в двух вращательных движениях. Шарики вращаются вокруг собственной оси с угловой скоростью $\omega = \dfrac{v_2 + v_1}{2R} = \dfrac{2\pi(n_1r_1 + n_2r_2)}{(r_2 - r_1)}$. **1,0 балл**

Оси шариков сами вращаются с угловой скоростью $\dfrac{v_0}{r_1 + R} = \dfrac{2\pi(n_1r_1 - n_2r_2)}{(r_2 + r_1)}$. **1,0 балл**

Результирующая угловая скорость вращения шариков равна $\Omega = \dfrac{2\pi(n_1r_1 + n_2r_2)}{(r_2 - r_1)} - \dfrac{2\pi(n_1r_1 - n_2r_2)}{(r_2 + r_1)} = \dfrac{4\pi(n_1r_1^2 + n_2r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}$ **0,5 балла**. Таким образом получим

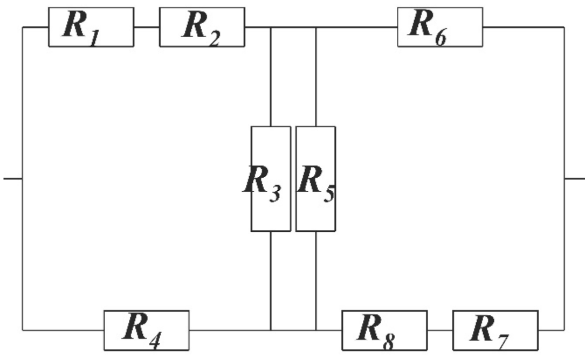
b) $\Omega = \dfrac{4\pi(n_1r_1^2 + n_2r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}$ **2,5 балла**

c) Центры шариков будут вращаться по часовой стрелке при $n_1r_1 > n_2r_2$ и против часовой стрелки при $n_1r_1 < n_2r_2$ **0,5 балла**

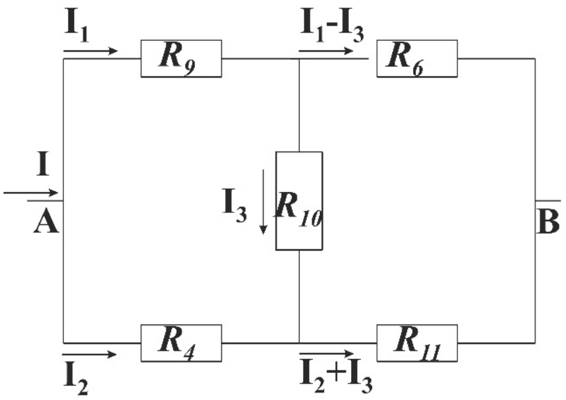
1.3.

a) $R_{AB} = \dfrac{11}{8}R = \dfrac{11}{8}$Ом **1,0 балл**

Схему можно представить следующей эквивалентной схемой:



или



где

$R_9 = R_1 + R_2 = 2R$

$R_{11} = R_8 + R_7 = 2R$

$\frac{1}{R_{10}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \rightarrow R_{10} = \frac{R}{2}$ **0,5 балла**

Тогда

$$\begin{cases} R_9 I_1 + R_{10} I_3 = R_4 I_2 \\ R_{10} I_3 + R_{11}\left(I_2 + I_3\right) = R_6\left(I_1 - I_3\right) \\ R_9 I_1 + R_6\left(I_1 - I_3\right) = R_4 I_2 + R_{11}\left(I_2 + I_3\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2RI_1 + \frac{R}{2} I_3 = RI_2 \\ \frac{R}{2} I_3 + 2R\left(I_2 + I_3\right) = R\left(I_1 - I_3\right) \\ 2RI_1 + RI_1 - RI_3 = RI_2 + 2RI_2 + 2RI_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2I_1 - I_2 + \frac{1}{2} I_3 = 0(1) \\ -I_1 + 2I_2 + \frac{7}{2} I_3 = 0(2) \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0(3) \end{cases}$$

Сложим уравнения (2) и (3):

$I_2 + \frac{5}{2} I_3 = 0$, тогда $I_2 = -\frac{5}{2} I_3$

Из уравнения (3):

$$I_1 = I_2 + I_3 = -\frac{3}{2} I_3$$

R_{AB} можно найти из уравнения

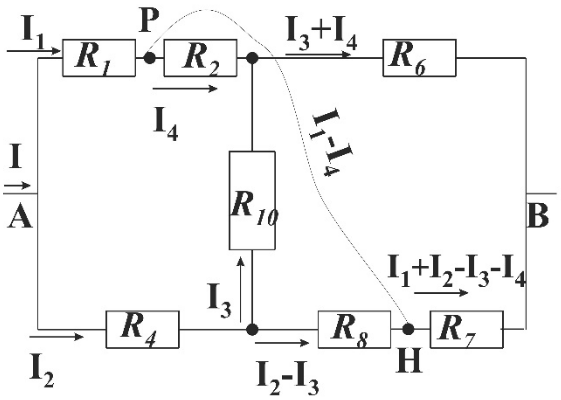
$$IR_{AB} = I_1 R_9 + R_6 \left(I_1 - I_3 \right)$$

$$R_{AB} \left(I_1 + I_2 \right) = I_1 R_9 + R_6 \left(I_1 - I_3 \right)$$

$$R_{AB} = \frac{-\frac{3}{2} I_3 \cdot 2R - \frac{5}{2} R I_3}{-4 I_3} = \frac{11}{8} R$$ **0,5 балла**

b) $R_{AB} = \dfrac{12}{11} R = \dfrac{12}{11}$ Ом **3,0 балла**

В случае соединения точек P и H схему можно представить в виде:



$R_1 = R_2 = R_4 = R_6 = R_7 = R_8 = R$, $R_{10} = \dfrac{R}{2}$. **1,0 балл**

Пусть $R_{PH} = 0$, тогда:

$$I_1 R = I_2 R + I_2 R - I_3 R$$

или

$$I_1 = 2I_2 - I_3 \quad (1)$$

$$I_2 R + I_3 \frac{R}{2} = I_1 R + I_4 R \quad \Leftrightarrow \quad I_1 - I_2 + \frac{1}{2} I_3 + I_4 = 0 \quad (2)$$

$$I_1 R_1 + I_4 R + R\left(I_3 + I_4 \right) = I_2 R + \left(I_2 - I_3 \right) R + \left(I_1 + I_2 - I_3 - I_4 \right) R$$

или $I_2 - I_3 - I_4 = 0$ (3)

$$\begin{cases} I_1 - 2I_2 + I_3 = 0(1) \\ I_1 - I_2 - \frac{1}{2} I_3 + I_4 = 0(2) \\ I_2 - I_3 - I_4 = 0(3) \end{cases}$$ **1,0 балл**

Сложим уравнения (2) и (3):

$$I_1-\frac{3}{2}I_3=0 \;\Rightarrow\; I_3=\frac{2}{3}I_1$$

Из Уравнения (1): $I_2=\frac{1}{2}\left(I_1+I_3\right)=\frac{5}{6}I_1$

Из Уравнения (3): $I_4=I_2-I_3=\frac{5}{6}I_1-\frac{2}{3}I_1=\frac{1}{6}I_1$

R_{AB} находим из уравнения:

$$R_{AB}=\frac{I_1R+I_3R+2I_4R}{I_1+I_2}=\frac{I_1R+\frac{2}{3}I_1R+\frac{2}{6}I_1R}{I_1+\frac{5}{6}I_1}=\frac{12R}{11}$$ **1,0 балл**

Примечание:

Правильным считается и решение, в котором предполагалось, что ток $I_4=0$, то есть, что проводник PH полностью шунтирует сопротивление R_2. В этом случае:

$$\begin{cases} I_1R_1=I_2R_4+\left(I_2-I_3\right)R_8 \\ \left(I_2-I_3\right)R_8+\left(I_1+I_2-I_3\right)R_7=I_3R_{10}+I_3R_6 \end{cases}$$ **1,0 балл**

$$\begin{cases} I_1-2I_2+I_3=0(1) \\ I_1+2I_2-\frac{7}{2}I_3=0(2) \end{cases}$$

Сложим Уравнения (1) и (2):

$$2I_1-\frac{5}{2}I_3=0 \;\Rightarrow\; I_1=\frac{5}{4}I_3$$

Из Уравнения (1): $I_2=\frac{I_1+I_3}{2}=\frac{9}{8}I_3$.

Тогда:

$$IR_{AB}=I_1R_1+\left(I_1+I_2-I_3\right)R_7$$

$$\left(I_1+I_2\right)R_{AB}=2I_1R+I_2R-I_3R$$ **1,0 балл**

$$\frac{19}{8}R_{AB}=\frac{21}{8}R \;\Leftrightarrow\; R_{AB}=\frac{21}{19}R$$

Fizica. Teorie. Soluţii

1.1.

La mărirea nivelului de apă forța Arhimede crește până la o valoare maximă, și apoi nu se schimbă. Odată cu aceasta, presiunea apei cu densitatea $\rho = 1\frac{g}{cm^3}$ creşte. Dopul nu începe a pluti, dacă masa lui va fi egală cu masa de apă din volumul trunchiului de con minus volumul cilindrului

1. $m = \rho\left\{\frac{\pi}{3}\left(R^2H - r^2h\right) - \pi r^2(H-h)\right\} = \rho\left\{\frac{\pi}{3^{3/2}}\left(H^3 - 3r^3\right) - \pi r^2(H - r\sqrt{3})\right\} 2{,}44\text{ g}$ **1,8 puncte**

2. $\rho = 259\frac{kg}{m^3} = 0{,}26\frac{g}{cm^3}$ **0,2 puncte**

1.2.

Dacă centrul bilei de rază R se mişcă în sensul acelor de ceasornic cu viteza v_0, atunci viteza inelului interior este $v_1 = \omega R + v_0$ şi este orientată în sensul acelor de ceasornic. Viteza inelului exterior este orientată în sens opus sensului acelor de ceasornic şi este egală cu $v_2 = \omega R - v_0$. Astfel,

a) $v_0 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) = \pi(n_1r_1 - n_2r_2)$ **1,0 punct**

Se observă că, bilele participă în două mișcări de rotaţie. Bilele se rotesc în jurul axei proprii cu viteza unghiulară $\omega = \frac{v_2 + v_1}{2R} = \frac{2\pi(n_1r_1 + n_2r_2)}{(r_2 - r_1)}$. **1,0 punct**

Axele bilelor însăși se rotesc cu viteza unghiulară $\frac{v_0}{r_1 + R} = \frac{2\pi(n_1r_1 - n_2r_2)}{(r_2 + r_1)}$. **1,0 punct**

Viteza unghiulară rezultantă de rotaţie a bilelor este

$\Omega = \frac{2\pi(n_1r_1 + n_2r_2)}{(r_2 - r_1)} - \frac{2\pi(n_1r_1 - n_2r_2)}{(r_2 + r_1)} = \frac{4\pi(n_1r_1^2 + n_2r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}$. **1,0 punct**

Deci, obţinem

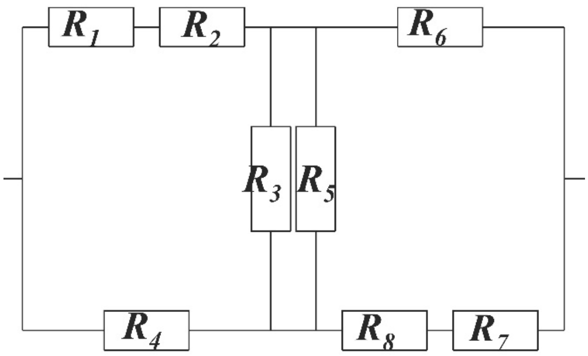
b) $\Omega = \frac{4\pi(n_1r_1^2 + n_2r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}$ **2,5 punct**

c) Centrele bilelor se vor roti în sensul acelor de ceasornic atunci când $n_1r_1 > n_2r_2$ şi în sens opus acelor de ceasornic atunci când $n_1r_1 < n_2r_2$ **0,5 puncte**

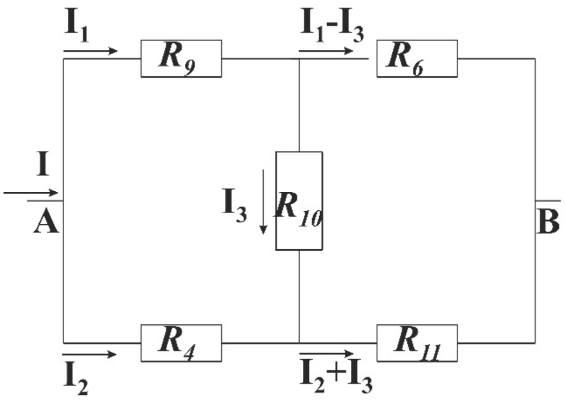
1.3.

a) $R_{AB} = \frac{11}{8}R = \frac{11}{8}$Ом **1,0 балл**

Schema electrică poate fi reprezantă prin următorul circuit ecivalent:



sau



unde

$R_9 = R_1 + R_2 = 2R$

$R_{11} = R_8 + R_7 = 2R$

$\frac{1}{R_{10}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \rightarrow R_{10} = \frac{R}{2}$ **0,5 puncte**

Atunci

$$\begin{cases} R_9 I_1 + R_{10} I_3 = R_4 I_2 \\ R_{10} I_3 + R_{11}\left(I_2 + I_3\right) = R_6\left(I_1 - I_3\right) \\ R_9 I_1 + R_6\left(I_1 - I_3\right) = R_4 I_2 + R_{11}\left(I_2 + I_3\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2RI_1 + \frac{R}{2} I_3 = RI_2 \\ \frac{R}{2} I_3 + 2R\left(I_2 + I_3\right) = R\left(I_1 - I_3\right) \\ 2RI_1 + RI_1 - RI_3 = RI_2 + 2RI_2 + 2RI_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2I_1 - I_2 + \frac{1}{2} I_3 = 0(1) \\ -I_1 + 2I_2 + \frac{7}{2} I_3 = 0(2) \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0(3) \end{cases}$$

Adunând expresiile (2) şi (3):

$I_2 + \frac{5}{2} I_3 = 0$, atunci $I_2 = -\frac{5}{2} I_3$

Din expresia (3):

$$I_1 = I_2 + I_3 = -\frac{3}{2} I_3$$

R_{AB} poate fi găsit din ecuaţia

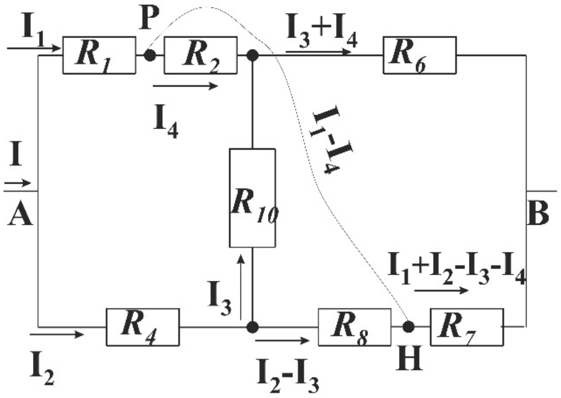
$$IR_{AB} = I_1 R_9 + R_6 \left(I_1 - I_3\right)$$

$$R_{AB}\left(I_1 + I_2\right) = I_1 R_9 + R_6 \left(I_1 - I_3\right)$$

$$R_{AB} = \frac{-\frac{3}{2} I_3 \cdot 2R - \frac{5}{2} R I_3}{-4 I_3} = \frac{11}{8} R$$ **0,5 puncte**

b) $R_{AB} = \frac{12}{11} R = \frac{12}{11}$ Om **3,0 puncte**

În cazul conectării punctelor P şi H, schema electrică va fi următoarea:



$R_1 = R_2 = R_4 = R_6 = R_7 = R_8 = R$, $R_{10} = \frac{R}{2}$. **1,0 punct**

Fie $R_{PH} = 0$, atunci:

$$I_1 R + R_{PH}\left(I_1 - I_4\right) = I_2 R + I_2 R - I_3 R$$

sau

$$I_1 = 2I_2 - I_3 \ (1)$$

$$I_2 R + I_3 \frac{R}{2} = I_1 R + I_4 R \iff I_1 - I_2 + \frac{1}{2} I_3 + I_4 = 0 \ (2)$$

$$I_1 R_1 + I_4 R + R\left(I_3 + I_4\right) = I_2 R + \left(I_2 - I_3\right) R + \left(I_1 + I_2 - I_3 - I_4\right) R$$

sau $I_2 - I_3 - I_4 = 0 \ (3)$

$$\begin{cases} I_1 - 2I_2 + I_3 = 0(1) \\ I_1 - I_2 - \frac{1}{2} I_3 + I_4 = 0(2) \\ I_2 - I_3 - I_4 = 0(3) \end{cases}$$ **1,0 punct**

Adunând expresiile (2) şi (3):

$$I_1 - \frac{3}{2} I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{2}{3} I_1$$

Din ecuaţia (1): $I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1 + I_3\right) = \frac{5}{6} I_1$

Din ecuaţia (3): $I_4 = I_2 - I_3 = \frac{5}{6} I_1 - \frac{2}{3} I_1 = \frac{1}{6} I_1$

Rezistenţa R_{AB} o găsim din expresia:

$$R_{AB} = \frac{I_1 R + I_3 R + 2I_4 R}{I_1 + I_2} = \frac{I_1 R + \frac{2}{3} I_1 R + \frac{2}{6} I_1 R}{I_1 + \frac{5}{6} I_1} = \frac{12R}{11}$$ **1,0 punct**

Notă:

Este considerată corectă soluţia problemei în care se presupune că curentul $I_4 = 0$, adică că conductorul PH şuntează rezistenţa R_2.

În acest caz:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = I_2 R_4 + (I_2 - I_3) R_8 \\ (I_2 - I_3) R_8 + (I_1 + I_2 - I_3) R_7 = I_3 R_{10} + I_3 R_6 \end{cases}$$ **1,0 punct**

$$\begin{cases} I_1 - 2I_2 + I_3 = 0 (1) \\ I_1 + 2I_2 - \frac{7}{2} I_3 = 0 (2) \end{cases}$$

Adunând expresiile (1) şi (2):

$$2I_1 - \frac{5}{2} I_3 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{5}{4} I_3$$

Din ecuaţia (1): $I_2 = \frac{I_1 + I_3}{2} = \frac{9}{8} I_3$.

Deci:

$$IR_{AB} = I_1 R_1 + (I_1 + I_2 - I_3) R_7$$

$$(I_1 + I_2) R_{AB} = 2I_1 R + I_2 R - I_3 R$$

$$\frac{19}{8} R_{AB} = \frac{21}{8} R \Leftrightarrow R_{AB} = \frac{21}{19} R$$ **1,0 punct**