A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2-5 martie, 2018

Clasa a X-*a*, ziua întâi

BAREM DE CORECTARE

Notă: *Orice altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctaj maxim.*

Problema 10.1.

1. Se scrie $f(x)=2018x^2-2(a_1+...+a_{2018})x+a_1^2+...+a_{2018}^2$ şi se trage concluzia că funcţia are un minim ...1p.
2. Se scrie $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f\left(\frac{a_1+...+a_{2018}}{2018}\right)$ şi se trage concluzia $f(x)\geq f\left(\frac{a_1+...+a_{2018}}{2018}\right)$, $(\forall)x\in R$ ....2p.
3. Se scrie $f(x)=2018x^2-2(a_1+a_2+...+a_{2018})x+1$ pentru $a_1^2+a_2^2+...+a_{2018}^2=1$ ....1p.
4. Se argumentează că $f(x)\geq 0$, $(\forall)x\in R$ ....1p.
5. Se calculează Δ' şi se menţionează că $\Delta'\leq 0$ ....1p.
6. Concluzie finală ....1p.

Problema 10.2.

1. Se notează $b-a=x$, $c-b=y$, $d-c=z$ şi se menţionează că $x, y, z\in R_+^*$ .... 2p.
2. Se scrie inegalitatea $(4a+3x+2y+z)^2>8(a(a+x+y)+(a+x)(a+x+y+z))$ ....1p.
3. Se obţine inegalitatea $x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz+4yz>0$ ....2p.
4. Se obţine inegalitatea $(x-z)^2+4(y^2+xy+yz)>0$ şi se trage concluzia finală...2p.

Problema 10.3.

1. Se realizează desenul corect şi se construieşte semidreapta $(AC$ ....1p.
2. Se argumentează coliniaritatea punctelor *A*, O_1 şi *O* ....1p.
3. Se demonstrează că $\Delta ACO_1 \sim \Delta APO$ ....1p.
4. Se argumentează că punctul *P* este mijlocul arcului *MPN* şi se menţionează că $(BD$ trece prin *P* ....2p.
5. Se arată că în patrulaterul *ABDC* două unghiuri opuse sunt suplimentare şi se trage concluzia finală ....2p.

Problema 10.4.

1. Pentru $x<-1$, se ajunge argumentat la totalitatea $\left[\begin{array}{l} x=\frac{a-8}{15}, \\ x=\frac{-a-8}{13} \end{array}\right.$ ....2p.
2. Pentru $x<-1$, se ajunge la concluzia $a\in(-7;5)$...1p.
3. Se menţionează că pentru $a\in\{-7;5\}$ ecuaţia are soluţie ....1p.
4. Pentru $x\geq -1$, se ajunge argumentat la totalitatea $\left[\begin{array}{l} x=-a-8, \\ x=\frac{a-8}{3} \end{array}\right.$ ....2p.
5. Pentru $x\geq -1$, se ajunge la concluzia $a\in(-7;5)$ şi se scrie răspunsul ....1p.

A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2-5 martie, 2018

Clasa a X-*a*, ziua a doua

BAREM DE CORECTARE

Notă: *Orice altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctaj maxim.*

Problema 10.5.

1. Se consideră perechea de numere pozitive $\frac{a}{b+c}$ şi 1 pentru care se aplică inegalitatea *MG-MH* ....1p.
2. Se aplică inegalitatea *MG-MH* pentru perechea de numere $\frac{b}{c+a}$ şi 1 şi pentru $\frac{c}{a+b}$ şi 1 ………………2p.
3. Se obţine inegalitatea $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2$ ……...2p.
4. Se arată că $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\neq 2$ ....1p.
5. Concluzia: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$, pentru $(\forall)a, b, c\in R_+^*$ ....1p.

Problema 10.6.

1. Se obţine egalitatea $\frac{n!}{m!}=m!-2$ …..……………………1p.
2. Se argumentează că $m\geq 3$ …………………………………………………..……………………….…1p.
3. Se argumentează că $n>m$ şi se scrie egalitatea $(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot n=m!-2$ ……………….....……1p.
4. Se argumentează că în partea stângă a egalităţii pot fi cel mult doi factori ………………………………..1p.
5. Se cercetează cazul $n=m+1$ …..………………………………………………………………......…1p.
6. Se cercetează cazul $n=m+2$ ………………………………………………………………………...1p.
7. Se scrie răspunsul: $m=3$, $n=4$ ……………………………………………………………….....1p.

Problema 10.7.

1. Se realizează desenul şi construcţiile suplimentare necesare, care conduc la rezolvarea problemei ....1p.
2. Se argumentează congruenţa $[MC_1]\equiv[BB_1]$ ………………………………………………………….. 1p.
3. Se demonstrează congruenţa $[AP]\equiv[MB_1]$ ……………………………………...…………. 2p.
4. Se demonstrează congruenţa $[CB_1]\equiv[A_1P]$ ………………………………………………………..1p.
5. Se demonstrează congruenţa $\Delta CNB_1\equiv\Delta A_1BP$ ……….……………..……………………………..1p.
6. Se demonstrează că $\Delta CMB_1\equiv\Delta A_1AP$ şi se trage concluzia că ΔMCC_1 are proprietatea dată …………….1p.

Problema 10.8.

1. Se obţine totalitatea $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0,\ x>0,\\ ax=2a-4,\quad (1)\end{cases}\\ \begin{cases}y=x^2,\ x>0,\\ x^2-ax+2a-4=0\quad (2)\end{cases}\end{array}\right.$ ………...……..……………………………………..…..1p.
2. Se cercetează cazul $a=0$ ……………….…………………………………………………………...1p.
3. Se cercetează complet primul sistem al totalităţii pentru $a\in R^*$ …...…………………………………..2p.
4. Se cercetează complet al doilea sistem al totalităţii ………………..……………………………………..2p.
5. Se obţine răspunsul corect ………………………….……………………………………………………..1p.