A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2-5 martie, 2018

Clasa a X*-a*, ziua întâi

SOLUŢIILE PROBLEMELOR

Problema 10.1. Fie funcţia $f: R \to R$, $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_{2018})^2$, unde a_1, $a_2, \ldots$, a_{2018} sunt numere reale date.

a) Să se arate că $f(x) \geq f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}}{2018}\right)$, oricare ar fi valorile numărului real *x*.

b) Să se arate că dacă $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2018}^2 = 1$, atunci $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}| \leq \sqrt{2018}$.

Rezolvare. a) Putem scrie $f(x) = 2018x^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018})x + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2018}^2$.

Funcţia f este de gradul al doilea. Întrucât $2018 > 0$, funcţia are un minim egal cu $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}}{2018}\right)$, adică $f(x) \geq f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}}{2018}\right)$, $(\forall) x \in R$.

b) Pentru $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2018}^2 = 1$, obţinem $f(x) = 2018x^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018})x + 1$.

Calculăm $\Delta' = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018})^2 - 2018$.

Din forma iniţială a funcţiei f, rezultă că $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in R$, atunci $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018})^2 \leq 2018 \Leftrightarrow |a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}| \leq \sqrt{2018}$.

Problema 10.2. Fie a, b, c şi d numere reale, $a < b < c < d$. Să se arate că $(a+b+c+d)^2 > 8(ac+bd)$.

Rezolvare. Notăm $b - a = x$, $c - b = y$, $d - c = z$, $x, y, z \in R_+^*$.

Obţinem $b = a + x$, $c = a + x + y$, $d = a + x + y + z$.

Inegalitatea dată ia forma $(4a + 3x + 2y + z)^2 > 8(a(a+x+y) + (a+x)(a+x+y+z))$.

Ultima inegalitate este echivalentă cu:

$16a^2 + 9x^2 + 4y^2 + z^2 + 24ax + 16ay + 8az + 12xy + 6xz + 4yz > 16a^2 + 24ax + 16ay + 8az + 8x^2 + 8xy + 8xz \Leftrightarrow$

$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz + 4yz > 0 \Leftrightarrow (x-z)^2 + 4(y^2 + xy + yz) > 0$.

Dar această inegalitate este adevărată, oricare ar fi $x, y, z \in R_+^*$.

Problema 10.3. Se consideră un cerc $\mathsf{C}(O)$ şi o coardă $[MN]$ a acestui cerc. În unul dintre segmentele circulare determinate de coarda $[MN]$ se înscriu două cercuri $\mathsf{C}_1(O_1)$ şi $\mathsf{C}_2(O_2)$, $O_1 \neq O_2$, care sunt tangente la cercul $\mathsf{C}(O)$ în punctele *A* şi *B*, iar la coarda $[MN]$ - în punctele *C* şi *D*, respectiv. Să se demonstreze că punctele *A*, *B*, *C* şi *D* aparţin unui cerc.

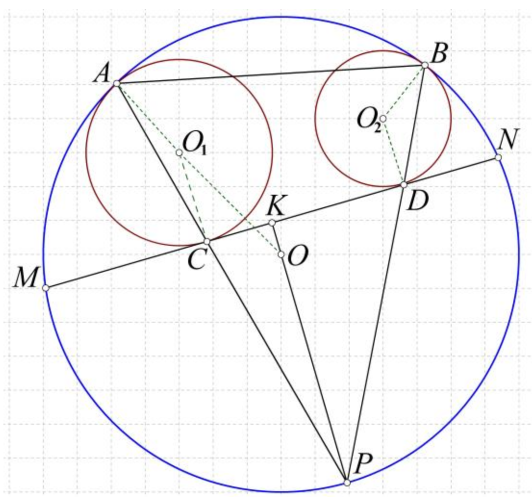
Rezolvare:

Realizăm desenul corespunzător datelor problemei.

Fie $(AC \cap \mathsf{C} = \{P\}$. Întrucât cercurile C şi C_1 au o tangentă comună ce trece prin punctul *A*, punctele *A*, O_1 şi *O* sunt coliniare. Triunghiurile ACO_1 şi APO sunt isoscele şi au un unghi de la bază comun, atunci ele sunt asemenea.

În acest caz $PO \parallel CO_1$, $CO_1 \perp MN \Rightarrow PO \perp MN$. Ştim că diametrul perpendicular pe o coardă o înjumătăţeşte în punctul de intersecţie *K*. Deci punctul *P* este mijlocul arcului *MPN*.

Analog se arată că $(BD$ intersectează cercul C în punctul *P*.



Fie $m(\angle ABD)=\alpha \Rightarrow m(\angle AOP)=2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\angle APO)=(180^o-2\alpha):2=90^o-\alpha=m(\angle ACO_1)\Rightarrow$
$m(\angle ACD)=90^o+90^o-\alpha=180^o-\alpha \Rightarrow m(\angle ACD)+m(\angle ABD)=180^o$.
Întrucât două unghiuri opuse ale patrulaterului *ABDC* sunt suplimentare, el este inscriptibil.

Problema 10.4. Să se determine toate valorile parametrului real a pentru care ecuaţia $\left||x-a|+2x\right|+4x=8|x+1|$ nu are soluţii reale.

Rezolvare. 1. Fie $x<-1$, atunci inecuaţia ia forma $\left||x-a|+2x\right|=-12x-8$.

Observăm că pentru $x<-1$, expresia $-12x-8$ este pozitivă, iar $\left||x-a|+2x\right|=-12x-8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x-a|+2x=-12x-8,\\ |x-a|+2x=12x+8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x-a|=-14x-8,\\ |x-a|=10x+8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\langle\begin{array}{l}-14x-8>0,\\ 10x+8<0,\\ (\forall)x\in(-\infty;-1)\end{array}\right\rangle \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-a=-14x-8,\\ x-a=14x+8,\\ x\in\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a-8}{15},\\ x=\dfrac{-a-8}{13}.\end{array}\right.$$

Cum ecuaţia nu are soluţii reale, se impun condiţiile $\begin{cases}\dfrac{a-8}{15}>-1,\\ \dfrac{-a-8}{13}>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a>-7,\\ a<5\end{cases} \Leftrightarrow a\in(-7;5)$.

Pentru $a\in\{-7;5\}$, observăm că numărul -1 este soluţie a ecuaţiei.

2. Fie $x\geq -1$, atunci $\left||x-a|+2x\right|=4x+8 \overset{4x+8>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}|x-a|+2x=4x+8,\\ |x-a|+2x=-4x-8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x-a|=2x+8,\\ |x-a|=-6x-8\end{array}\right. \underset{-6x-8<0}{\overset{2x+8>0}{\Leftrightarrow}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-a=2x+8,\\ x-a=-2x-8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-a-8,\\ x=\dfrac{a-8}{3}.\end{array}\right.$$

Cercetăm sistemul $\begin{cases}-a-8<-1,\\ \dfrac{a-8}{3}<-1\end{cases} \Leftrightarrow a\in(-7;5)$.

Răspuns: $a\in(-7;5)$

A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2-5 martie, 2018

Clasa a X-*a*, ziua a doua

SOLUŢIILE PROBLEMELOR

Problema 10.5. Să se arate că oricare ar fi numerele reale pozitive a, b şi c, este adevărată inegalitatea: $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2$.

Rezolvare. Considerăm numerele reale pozitive $\dfrac{a}{b+c}$ şi 1. Din inegalitatea dintre media geometrică şi media armonică, avem $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}\cdot 1}\geq \dfrac{2\dfrac{a}{b+c}\cdot 1}{\dfrac{a}{b+c}+1}=\dfrac{2a}{a+b+c}$. Idem $\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}\geq \dfrac{2b}{a+b+c}$ şi $\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\geq \dfrac{2c}{a+b+c}$.

Adunând membru cu membru aceste trei inegalităţi, obţinem $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2$.

Egalitatea cu 2 poate avea loc doar dacă $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=1$, dar aceste egalităţi nu au loc simultan.

În concluzie: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$, oricare ar fi $a, b, c\in R_+^*$.

Metoda a doua $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}+\frac{b}{\sqrt{b(c+a)}}+\frac{c}{\sqrt{c(a+b)}}$.

Aplicând inegalitatea dintre media geometrică şi media aritmetică, obţinem

$$\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}+\frac{b}{\sqrt{b(c+a)}}+\frac{c}{\sqrt{c(a+b)}}\geq\frac{a}{\frac{a+(b+c)}{2}}+\frac{b}{\frac{b+(c+a)}{2}}+\frac{c}{\frac{c+(a+b)}{2}}=2.$$

Egalitatea cu 2 nu poate avea loc deoarece pentru $a, b, c\in R_+^*$ nu sunt verificate simultan egalităţile: $a=b+c,\ b=c+a,\ c=a+b$.

Problema 10.6. Să se determine toate numerele naturale m şi n care verifică egalitatea $(m!-1)^2=n!+1$.

Rezolvare. $(m!-1)^2=n!+1 \Leftrightarrow n!=m!\cdot(m!-2)\Leftrightarrow \frac{n!}{m!}=m!-2$. (*)

$n!+1\geq 2\Rightarrow m\geq 3\Rightarrow \frac{n!}{m!}\geq 4\Rightarrow n>m$, deci ecuaţia (*) poate fi scrisă $(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot n=m!-2$.

Dacă în partea stângă a acestei egalităţi sunt cel puţin 3 factori, atunci partea stângă a egalităţii este divizibilă cu 3. Observăm că partea dreaptă nu este divizibilă cu 3, deci egalitatea este imposibilă.

A rămas de cercetat două variante:

1. $n=m+1$. Obţinem ecuaţia $m+1=m!-2 \Leftrightarrow m!=m+3 \Leftrightarrow (m-1)!=1+\frac{3}{m}$.

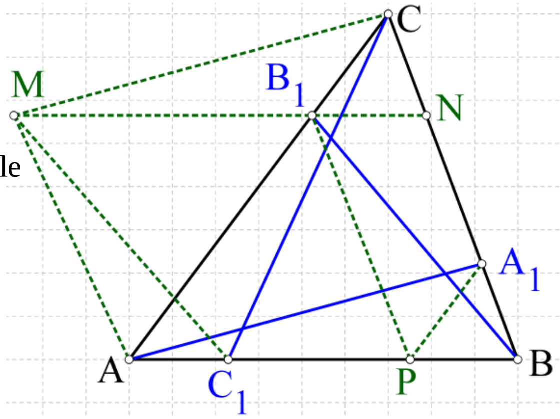
Singura soluţie a acestei ecuaţii în N este $m=3$. Atunci $n=4$.

2. Fie $n=m+2$. Obţinem ecuaţia $(m+1)(m+2)=m!-2 \Leftrightarrow m^2+3m+4=m!$.

$m^2+3m+4\geq 22$, atunci $m\geq 4$. Pentru $m=4$, egalitatea este falsă. Pentru $m\geq 5$, ultima cifră a numărului $m!$ este egală cu zero, pe când ultima cifră a numărului m^2+3m+4 poate fi 2, 4 sau 8. *Răspuns:* $m=3$, $n=4$

Problema 10.7. Fie ABC un triunghi arbitrar, iar A_1, B_1 şi C_1 trei puncte, $A_1\in(BC)$, $B_1\in(AC)$, $C_1\in(AB)$, astfel încât $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}$. Să se demonstreze că lungimile segmentelor $[AA_1]$, $[BB_1]$ şi $[CC_1]$ pot servi ca lungimi ale laturilor unui triunghi.

Rezolvare.



Prin punctul C_1 ducem o paralelă la BB_1, iar prin punctul B_1 – o paralelă la AB. Notăm cu M punctul de intersecţie a acestor paralele, iar $MB_1\cap BC=\{N\}$. Fie $A_1P\parallel AC, P\in AB$.

Vom arăta că laturile triunghiului MCC_1 au lungimile egale cu lungimile segmentelor AA_1, BB_1 şi CC_1.

1. $[CC_1]\equiv[CC_1]$.
2. Patrulaterul MB_1BC_1, având laturile opuse paralele, este paralelogram. Atunci $[MC_1]\equiv[BB_1]$.
3. Vom arăta că $[MC]\equiv[AA_1]$.

- Întrucât $B_1N\parallel AB$, rezultă că $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CN}{BN}$.

Din ipoteză avem $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BA_1}{A_1C}$, atunci $\frac{CN}{BN}=\frac{BA_1}{A_1C}$, atunci $[CN]\equiv[BA_1]$.

• Idem, întrucât $A_1P \parallel AC$, atunci $[BP] \equiv [AC_1]$, iar $[AP] \equiv [C_1B]$ $\Rightarrow \boxed{[AP] \equiv [MB_1]}$. (1)

• $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BP}{AP}$, atunci, conform reciprocei teoremei lui Thales, $PB_1 \parallel BC$, adică patrulaterul BPB_1N este un paralelogram, iar $[BP] \equiv [NB_1]$.

• dreptele *MN* şi *AB* sunt paralele, iar *BC* este secantă a acestor drepte, atunci $\angle CNB_1 \equiv \angle A_1BP$. Conform criteriului (LUL), rezultă că $\Delta CNB_1 \equiv \Delta A_1BP$, atunci $\boxed{[CB_1] \equiv [A_1P]}$, (2)

iar $\angle CB_1N \equiv \angle A_1PB$, deci $\boxed{\angle CB_1M \equiv \angle A_1PA}$. (3)

Din (1), (3) şi (2), rezultă că $\Delta CMB_1 \equiv \Delta A_1AP$, atunci $[MC] \equiv [AA_1]$.

Problema 10.8.

Să se rezolve, în funcţie de valorile parametrului real *a*, sistemul de ecuaţii $\begin{cases} y-4 = a(x-2), \\ \dfrac{2y}{x+|x|} = \sqrt{y} \end{cases}$ în $R \times R$.

Rezolvare. Observăm că pentru $x \le 0$, ecuaţia a doua a sistemului n-are sens.

Mai observăm că perechea ordonată $(2;4)$ este soluţie a sistemului, oricare ar fi valorile reale ale parametrului *a*. Sistemul dat este echivalent cu:

$$\begin{cases} y-4 = a(x-2), \\ \dfrac{y}{x} = \sqrt{y}, \ \ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-4 = a(x-2), \ \ x>0, \\ \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=x^2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \ x>0, \\ ax = 2a-4, \quad (1) \end{cases} \\ \begin{cases} y=x^2, \ x>0, \\ x^2-ax+2a-4=0 \quad (2) \end{cases} \end{array}\right. \qquad (*)$$

1. Fie $a=0$, atunci primul sistem al totalităţii (*) nu are soluţii, iar al doilea sistem, deci şi sistemul dat, are doar soluţia $(2;4)$.

2. Fie că $a \in R^*$. Ecuaţia (1) are o soluţie unică, $x = 2-\frac{4}{a}$.

2.1. Fie $2-\frac{4}{a} \le 0 \Leftrightarrow a \in (0;2]$, atunci primul sistem al totalităţii (*) nu va avea soluţii.

2.2. Fie $a \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$, atunci primul sistem al totalităţii are o soluţie unică $\left(2-\frac{4}{a};0\right)$.

3. Pentru ecuaţia (2) calculăm $\Delta = (a-4)^2$, atunci $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=a-2. \end{array}\right.$

3.1. Pentru $x=2 \Rightarrow y=4$, oricare ar fi $a \in R$.

3.2. Fie că $a-2 \le 0 \Leftrightarrow a \le 2$, atunci sistemul al doilea al totalităţii (*) are doar soluţia $(2;4)$.

3.3. Fie că $a>2$, atunci sistemul al doilea al totalităţii (*) are soluţiile $(2;4)$ şi $\left(a-2;(a-2)^2\right)$.

3.3.1. Pentru $a=4$ aceste soluţii coincid.

3.3.2. Pentru $a \in (2;4) \cup (4;+\infty)$, soluţiile sunt distincte.

În urma unei sinteze a rezultatelor obţinute, obţinem ***răspunsul***:

1. Pentru $a \in [0;2]$, $S = \{(2;4)\}$;
2. Pentru $a \in (-\infty;0) \cup \{4\}$, $S = \left\{(2;4);\left(2-\frac{4}{a};0\right)\right\}$;
3. Pentru $a \in (2;4) \cup (4;+\infty)$, $S = \left\{(2;4);\left(2-\frac{4}{a};0\right);\left(a-2;(a-2)^2\right)\right\}$.