Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova
Agenţia Naţională pentru Curriculum şi Evaluare

A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2-5 martie, 2018

Clasa a X-*a,* ziua întâi

Problema 10.1. Fie funcţia $f: R \to R$, $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_{2018})^2$, unde a_1, $a_2, \ldots$, a_{2018} sunt numere reale date.

a) Să se arate că $f(x) \geq f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}}{2018}\right)$, oricare ar fi valorile numărului real *x*.

b) Să se arate că dacă $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2018}^2 = 1$, atunci $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}| \leq \sqrt{2018}$.

Problema 10.2. Fie a, b, c şi d numere reale, $a < b < c < d$.
Să se arate că $(a+b+c+d)^2 > 8(ac+bd)$.

Problema 10.3. Se consideră un cerc $C(O)$ şi o coardă $[MN]$ a acestui cerc. În unul dintre segmentele circulare determinate de coarda $[MN]$ se înscriu două cercuri $C_1(O_1)$ şi $C_2(O_2)$, $O_1 \neq O_2$, care sunt tangente la cercul $C(O)$ în punctele *A* şi *B*, iar la coarda $[MN]$ - în punctele *C* şi *D*, respectiv. Să se demonstreze că punctele *A, B, C* şi *D* aparţin unui cerc.

Problema 10.4. Să se determine toate valorile parametrului real *a* pentru care ecuaţia $||x-a| + 2x| + 4x = 8|x+1|$ nu are soluţii reale.

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte

MULT SUCCES!

Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova
Agenţia Naţională pentru Curriculum şi Evaluare

A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2-5 martie, 2018

Clasa a X-*a,* ziua întâi

Problema 10.1. Fie funcţia $f: R \to R$, $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_{2018})^2$, unde a_1, $a_2, \ldots$, a_{2018} sunt numere reale date.

a) Să se arate că $f(x) \geq f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}}{2018}\right)$, oricare ar fi valorile numărului real *x*.

b) Să se arate că dacă $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2018}^2 = 1$, atunci $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}| \leq \sqrt{2018}$.

Problema 10.2. Fie a, b, c şi d numere reale, $a < b < c < d$.
Să se arate că $(a+b+c+d)^2 > 8(ac+bd)$.

Problema 10.3. Se consideră un cerc $C(O)$ şi o coardă $[MN]$ a acestui cerc. În unul dintre segmentele circulare determinate de coarda $[MN]$ se înscriu două cercuri $C_1(O_1)$ şi $C_2(O_2)$, $O_1 \neq O_2$, care sunt tangente la cercul $C(O)$ în punctele *A* şi *B*, iar la coarda $[MN]$ - în punctele *C* şi *D*, respectiv. Să se demonstreze că punctele *A, B, C* şi *D* aparţin unui cerc.

Problema 10.4. Să se determine toate valorile parametrului real *a* pentru care ecuaţia $||x-a| + 2x| + 4x = 8|x+1|$ nu are soluţii reale.

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte

MULT SUCCES!

Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova
Agenţia Naţională pentru Curriculum şi Evaluare

62-я МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА
Кишинёв, 2-5 марта, 2018г.
X-й класс, первый день

Задача 10.1. Дана функция $f : R \to R$, $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_{2018})^2$, где a_1, a_2,…, a_{2018} данные действительные числа.

a) Покажите, что $f(x) \geq f\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}}{2018}\right)$, для любых значений действительного числа *x*.

b) Покажите, что если $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2018}^2 = 1$, тогда $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}| \leq \sqrt{2018}$.

Задача 10.2. Даны действительные числа a, b, c и d, такие что $a < b < c < d$. Покажите, что $(a+b+c+d)^2 > 8(ac+bd)$.

Задача 10.3. Дана окружность $C(O)$ и $[MN]$ - хорда этой окружности. В одном из круговых сегментов определённых хордой $[MN]$ вписаны две окружности $C_1(O_1)$ и $C_2(O_2)$, $O_1 \neq O_2$, которые касаются окружности $C(O)$ в точках *A* и *B*, а хорды $[MN]$ - в точках *C* и *D*, соответственно. Докажите, что точки *A*, *B*, *C* и *D* находятся на одной окружности.

Задача 10.4. Найдите все значения действительного параметра *a*, при которых уравнение $||x-a| + 2x| + 4x = 8|x+1|$ не имеет действительных решений.

Время выполнения – 4астрономических часа
Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов
ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova
Agenţia Naţională pentru Curriculum şi Evaluare

62-я МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА
Кишинёв, 2-5 марта, 2018г.
X-й класс, первый день

Задача 10.1. Дана функция $f : R \to R$, $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_{2018})^2$, где a_1, a_2,…, a_{2018} данные действительные числа.

a) Покажите, что $f(x) \geq f\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}}{2018}\right)$, для любых значений действительного числа *x*.

b) Покажите, что если $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2018}^2 = 1$, тогда $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{2018}| \leq \sqrt{2018}$.

Задача 10.2. Даны действительные числа a, b, c и d, такие что $a < b < c < d$. Покажите, что $(a+b+c+d)^2 > 8(ac+bd)$.

Задача 10.3. Дана окружность $C(O)$ и $[MN]$ - хорда этой окружности. В одном из круговых сегментов определённых хордой $[MN]$ вписаны две окружности $C_1(O_1)$ и $C_2(O_2)$, $O_1 \neq O_2$, которые касаются окружности $C(O)$ в точках *A* и *B*, а хорды $[MN]$ - в точках *C* и *D*, соответственно. Докажите, что точки *A*, *B*, *C* и *D* находятся на одной окружности.

Задача 10.4. Найдите все значения действительного параметра *a*, при которых уравнение $||x-a| + 2x| + 4x = 8|x+1|$ не имеет действительных решений.

Время выполнения – 4астрономических часа
Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов
ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova

Agenţia Naţională pentru Curriculum şi Evaluare

A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2-5 martie, 2018

Clasa a X-*a,* ziua a doua

Problema 10.5. Să se arate că oricare ar fi numerele reale pozitive a, b şi c, este adevărată inegalitatea: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Problema 10.6. Să se determine toate numerele naturale m şi n care verifică egalitatea $(m!-1)^2=n!+1$.

Problema 10.7. Fie ABC un triunghi arbitrar, iar A_1, B_1 şi C_1 trei puncte, $A_1\in(BC)$, $B_1\in(AC)$, $C_1\in(AB)$, astfel încât $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}$. Să se demonstreze că lungimile segmentelor AA_1, BB_1 şi CC_1 pot servi ca lungimi ale laturilor unui triunghi.

Problema 10.8. Să se rezolve, în funcţie de valorile parametrului real a, sistemul de ecuaţii $\begin{cases} y-4=a(x-2), \\ \frac{2y}{x+|x|}=\sqrt{y} \end{cases}$ în $R\times R$.

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte

MULT SUCCES!

Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova

Agenţia Naţională pentru Curriculum şi Evaluare

A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2-5 martie, 2018

Clasa a X-*a,* ziua a doua

Problema 10.5. Să se arate că oricare ar fi numerele reale pozitive a, b şi c, este adevărată inegalitatea: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Problema 10.6. Să se determine toate numerele naturale m şi n care verifică egalitatea $(m!-1)^2=n!+1$.

Problema 10.7. Fie ABC un triunghi arbitrar, iar A_1, B_1 şi C_1 trei puncte, $A_1\in(BC)$, $B_1\in(AC)$, $C_1\in(AB)$, astfel încât $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}$. Să se demonstreze că lungimile segmentelor AA_1, BB_1 şi CC_1 pot servi ca lungimi ale laturilor unui triunghi.

Problema 10.8. Să se rezolve, în funcţie de valorile parametrului real a, sistemul de ecuaţii $\begin{cases} y-4=a(x-2), \\ \frac{2y}{x+|x|}=\sqrt{y} \end{cases}$ în $R\times R$.

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte

MULT SUCCES!

Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova
Agenţia Naţională pentru Curriculum şi Evaluare

62-я МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинёв, 2-5 марта, 2018г.

X-й класс, второй день

Задача 10.5. Покажите, что для любых действительных положительных чисел a, b и c, справедливо неравенство: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Задача 10.6. Найдите все натуральные числа m и n для которых выполняется равенство $(m!-1)^2=n!+1$.

Задача 10.7. Дан произвольный треугольник ABC и три точки A_1, B_1 и C_1, $A_1\in(BC)$, $B_1\in(AC)$, $C_1\in(AB)$, такие что $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}$. Докажите, что длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 могут быть длинами сторон одного треугольника.

Задача 10.8. Решите, в зависимости от значений действительного параметра a, систему уравнений $\begin{cases} y-4=a(x-2), \\ \frac{2y}{x+|x|}=\sqrt{y} \end{cases}$ на множестве $R\times R$.

Время выполнения – 4астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova
Agenţia Naţională pentru Curriculum şi Evaluare

62-я МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинёв, 2-5 марта, 2018г.

X-й класс, второй день

Задача 10.5. Покажите, что для любых действительных положительных чисел a, b и c, справедливо неравенство: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Задача 10.6. Найдите все натуральные числа m и n для которых выполняется равенство $(m!-1)^2=n!+1$.

Задача 10.7. Дан произвольный треугольник ABC и три точки A_1, B_1 и C_1, $A_1\in(BC)$, $B_1\in(AC)$, $C_1\in(AB)$, такие что $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}$. Докажите, что длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 могут быть длинами сторон одного треугольника.

Задача 10.8. Решите, в зависимости от значений действительного параметра a, систему уравнений $\begin{cases} y-4=a(x-2), \\ \frac{2y}{x+|x|}=\sqrt{y} \end{cases}$ на множестве $R\times R$.

Время выполнения – 4астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!