**MINISTERUL EDUCAŢIEI, CULTURII ŞI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA**
**AGENŢIA NAŢIONALĂ PENTRU CURRICULUM ŞI EVALUARE**

A 62 – a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 3 - 4 martie 2018, clasa a XI-a

BAREME DE EVALUARE

<table>
<tr><td colspan="3">11.1. Găsiți domeniul de valori $E_f$ al funcției $f: R\setminus\{-1, 0, 1\} \to R$,<br>$$f(x) = arctg\left(\frac{x}{x+1}\right) + arctg\left(\frac{x}{x-1}\right) - arctg\left(\frac{1}{2x^2}\right).$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Rezolvare cu barem de evaluare</td></tr>
<tr><td>Pasul</td><td>Etape ale rezolvării</td><td>Punctaj acordat</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Pentru calculul corect al derivatei functiei $f$</td><td>2 puncte</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Pentru concluzia că $f(x) = Const$ pe orice interval de derivabilitate al funcției $f$</td><td>1 punct</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Deoarece funcția $f(x)$ are discontinuități în punctele $-1, 0, 1$, atunci valorile constante ale funcției $f(x)$ pot fi diferite pe intervalele de continuitate ale acestei funcții: $(-\infty;-1), (-1;0), (0;1), (1;+\infty)$</td><td>1 punct</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Deorece $f(-x) = f(x)$, atunci $f(x)$ este funcție pară. Deaceea, este suficient de considerat numai 2 intervale: $(0;1), (1;+\infty)$.</td><td>1 punct</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Argumentează că $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ pentru $x \in (0, 1)$</td><td>1 punct</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Argumentează că $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pentru $x \in (1, +\infty)$ cu concluzia $E_f = \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$</td><td>1 punct</td></tr>
<tr><td></td><td>Punctaj total</td><td>7 puncte</td></tr>
</table>

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

| | | |
|---|---|---|
| 11.2. Găsiți toate valorile parametrului $a \in R$ , pentru care sistemul $\begin{cases} y = \sqrt{5+4x-x^2} + 2 \\ y = \sqrt{9-a^2+2ax-x^2} + a \end{cases}$ are exact o soluție în $R \times R$ . | | |
| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
| Pasul | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | Scrie sistemul de relații echivalent cu condițiile din ipoteză | 3 puncte |
| 2. | Figura geometrică, care este determinată de relațiile scrise în primele 2 linii ale sistemului, este semicercul $T_2$ cu centrul $(2;2)$ și raza $3$ (în plus $\lvert x-2\rvert \le 3 \Rightarrow x \in [-1;5]$). | 1 punct |
| 3. | Figura geometrică, care este determinată de relațiile scrise în liniile 3 și 4 ale sistemului, este semicercul $T_a$ cu centrul în punctul $(a;a)$ și raza $3$ (în plus $x \in [a-3;a+3]$). | 1 punct |
| 4. | Razele acestor semicercuri $T_a$ sunt aceleași (și sunt egale cu $3$), iar centrele $(a;a)$ se află pe dreapta $y = x$, atunci aceste semicercuri $T_a$ pot să se intersecteze cu semicercul fixat $T_2$ doar când $-1 \le a \le 5$. | 1 punct |
| 5. | Pentru $a \ne 2$ aceste semicercuri $T_a$ se intersectează cu $T_2$ într-un punct, iar pentru $a = 2$ avem $T_2 \equiv T_a$. Deaceea, $a \in [-1;5] \setminus \{2\}$. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

| |
|---|
| 11.3. În interiorul unui cerc mare sunt construite trei cercuri mici congruente, astfel încât fiecare cerc mic este tangent la cercul mare și la celelalte două cercuri mici. Dintr-un punct arbitrar $M$, situat pe cercul mare și diferit de punctele de tangență, este dusă câte o tangentă la fiecare cerc mic. Fie $l_1, l_2, l_3$ - lungimile segmentelor tangentelor, duse din punctul $M$ până la punctele respective de tangență situate pe cercurile mici. Demonstrați, că una dintre aceste lungimi este egală cu suma celorlalte două. |

| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
|---|---|---|
| Pasul | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | Arată că dacă $K, L, N$ sunt punctele de tangență ale cercului mare cu cercurile mici, atunci triunghiul $KLN$ este echilateral. | 1 punct |
| 2. | Fie $\omega$ cercul circumscris triunghiului echilateral $KLN$, iar $M$ un punct arbitrar pe $\omega$. Dacă M aparține arcului deschis KL, atunci $MK + ML = MN$. | 1 punct |
| 3. | Arată că, dacă $MK$ intersectează cercul cu centrul $O_1$ în punctul $A$, iar $MB$ este tangenta la același cerc, atunci conform teoremei referitoare la tangentă și secantă $MB^2 = MK \cdot MA$. | 1 punct |
| 4. | Aplică teorema lui Thales și obține relația $MA = MK \cdot \frac{R-r}{R}$ | 1 punct |
| 5. | Obține relația $MB = MK \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}}$ | 1 punct |
| 6. | Obține relațiile $MC = MN \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}}, \quad MD = ML \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}}$. | 1 punct |
| 7. | Aplică $MK + MN = ML$ și obține $MB + MC = MK \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}} + MN \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}} =$ $= (MK + MN) \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}} = ML \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}} = MD.$ | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

| 11.4. Demonstrați, că ecuația $\left[x\right]+\left[3x\right]+\left[9x\right]+\left[27x\right]+\left[81x\right]=19480$ nu are soluții în R ( prin $\left[\alpha\right]$ s-a notat partea întreagă a numărului real $\alpha$ ). | | |
|---|---|---|
| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
| Pasul | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | Demonstrează că pentru orice $k \in N$ este adevărată inegalitatea: $k\cdot[x]\le k\cdot x\le k\cdot[x]+(k-1)$. | 3 puncte |
| 2. | Aplică inegalitatea dublă de la p. 1 și obține estimațiile $121\cdot[x]\le 19480\le 121\cdot[x]+117$ | 2 puncte |
| 3. | Scrie reprezentarea $19480=121\cdot 160+120$ | 1 punct |
| 4. | Obține $121\cdot[x]\le 121\times 160+120\le 121\cdot[x]+117$, contradicție. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

| 11.5. Găsiți toate valorile parametrului $a \in R,$ pentru care sistemul <br> $$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+6x+10y+34}+\sqrt{x^2+y^2+6x+6y+18}=2 \\ y^2+x^2-4x+10=a \end{cases}$$ <br> are soluție unică în $R \times R$. | | |
|---|---|---|
| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
| Pasul | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | Sistemul inițial este echivalent cu următorul sistem: $\begin{cases} \sqrt{(x+3)^2+(y+5)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}=2 \\ (x-2)^2+y^2=a-6 \end{cases} \Rightarrow \quad a-6 \geq 0.$ | 2 puncte |
| 2. | A doua ecuație a sistemului determină un cerc cu centrul în punctul $O\,(2;0)$ și raza $R=\sqrt{a-6}$ pentru $a>6$ sau un punct $O\,(2;0)$ pentru $a=6.$ | 1 punct |
| 3. | Distanța între două puncte $A\,(x_1;y_1)$ și $B\,(x_2;y_2)$ poate fi găsită conform formulei $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$ | 1 punct |
| 4. | Conform formulei distanței prima ecuație a sistemului arată că suma distanțelor de la punctul $M\ (x;y)$ până la punctele $A\,(-3;-5)$ și $B\,(-3;-3)$ este egală cu 2 | 1 punct |
| 5. | Cum distanța dintre punctele $A$ și $B$ este egală cu $2$, rezultă că punctul $M\ (x;y) \in [AB]$. Rezultă că locul geometric de puncte determinat de prima ecuație a sistemului este segmentul $[AB]$. | 1 punct |
| 6. | Obține $OB \leq R \leq OA \iff OB^2 \leq R^2 \leq OA^2 \iff 5^2+3^2 \leq a-6 \leq 5^2+5^2$, de unde rezultă că $a \in [40;56]$ | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

| | | |
|---|---|---|
| 11.6. Fie cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punctul $K$ este un punct interior al muchiei $BB_1$ astfel, încât $BK/KB_1 = m$. Prin punctele $K$ și $C_1$ este trasat un plan $\alpha$, paralel dreptei $BD_1$.<br>a) Fie $P$ punctul de intersecție al planului $\alpha$ cu dreapta $A_1B_1$. Găsiți valoarea raportului $A_1P/PB_1$.<br>b) Planul $\alpha$ divizează cubul în 2 părți. Găsiți raportul volumelor acestor părți. | | |
| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
| Pasul | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | Arată că pentru $m=1$ avem $A_1P/PB_1 = 0$. | 1 punct |
| 2. | Se studiază 2 cazuri: $P \in (B_1A_1)$ și $m>1$; 2. $P \in (B_1A_1$, $P \notin [B_1A_1]$ și $m<1$. | 1 punct |
| 3. | Cazul 1: $\Delta B_1FP \cong \Delta D_1FC_1$ (fiindcă $A_1B_1 \,\|\, C_1D_1$) și $\frac{1}{m} = \frac{B_1F}{FD_1} = \frac{B_1P}{C_1D_1} = \frac{B_1P}{a}$.<br>$PB_1 = \frac{a}{m}$, $A_1P = a \cdot \frac{m-1}{m}$. | 1 punct |
| 4. | $\frac{V_{partea\,1}}{V_{partea\,2}} = \frac{a^3/6m(m+1)}{a^3 - a^3/6m(m+1)} = \frac{1}{6m(m+1)-1} = \frac{1}{6m^2+6m-1}$. | 1 punct |
| 5. | Cazul 2. $\Delta B_1FP \cong \Delta D_1FC_1$ (fiindcă $A_1B_1 \,\|\, C_1D_1$) și $\frac{1}{m} = \frac{B_1F}{FD_1} = \frac{B_1P}{C_1D_1} = \frac{B_1P}{a}$.<br>$PB_1 = \frac{a}{m}$, $A_1P = a \cdot \frac{1-m}{m}$. | 1 punct |
| 6. | Avem $\Delta PA_1N \cong \Delta PB_1C_1$ (fiindcă $NA_1 \,\|\, B_1C_1$). $\frac{PA_1}{PB_1} = \frac{A_1N}{B_1C_1} \Rightarrow A_1N = a(1-m)$.<br>$\Delta PA_1M \cong \Delta PB_1K$ (fiindcă $MA_1 \,\|\, BB_1$), $\frac{PA_1}{PB_1} = \frac{A_1M}{B_1K} \Rightarrow A_1M = a \cdot \frac{1-m}{m+1}$. | 1 punct |
| 7. | $\frac{V_{partea\,1}}{V_{partea\,2}} = \frac{V_1 - V_2}{a^3 - (V_1 - V_2)} = \frac{a^3 \cdot \frac{1-(1-m)^3}{6m(m+1)}}{a^3 - a^3 \cdot \frac{1-(1-m)^3}{6m(m+1)}} = \frac{1-(1-m)^3}{6m(m+1)-(1-(1-m)^3)} = \frac{3-3m+m^2}{3+9m-m^2}$. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

| 11.7. Rezolvați ecuația $\sqrt{y\sqrt{5}}-\sqrt{x\sqrt{5}}=\sqrt{3\sqrt{5}-5}$ în numere raționale. | | |
|---|---|---|
| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
| Pasul | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | DVA: $\begin{cases}\sqrt{y\sqrt{5}}-\sqrt{x\sqrt{5}}\geq 0\\ y\geq 0,\quad x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad 0\leq x\leq y.$ | 1 punct |
| 2. | $y\sqrt{5}-2\sqrt{y\sqrt{5}}\cdot\sqrt{x\sqrt{5}}+x\sqrt{5}=3\sqrt{5}-5$<br>Obține relațiile $(y+x-3)\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5xy}-5 \qquad (*)$<br>$y+x-3=2\sqrt{xy}-\sqrt{5}$ | 2 puncte |
| 3. | Obține<br>$(y+x-3)^2=4xy-4\sqrt{xy}\cdot\sqrt{5}+5 \Rightarrow 4\sqrt{5xy}=(4xy+5-(y+x-3)^2)\in Q$ | 1 punct |
| 4. | Rezultă că $\sqrt{5xy}\in Q$. Din **(∗)** obținem că $2\sqrt{5xy}-5\in Q$. | 1 punct |
| 5. | Obține relațiile $\begin{cases}y+x-3=0\\ 2\sqrt{5xy}-5=0\end{cases}$ | 1 punct |
| 6. | Rezolvă sistemul și obține 2 soluții: $(x;y)=\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ sau $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.<br>Luând în considerare DVA, obține $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

| 11.8. Funcția $f:[0,1]\to[0,1]$ este crescătoare pe segmentul $[0,1]$. Demonstrați că există un număr $a\in[0,1]$, astfel încât $f(a)=a$. | | |
|---|---|---|
| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
| Pasul | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | Consideră mulțimea $A=\{x\in[0,1] \mid x\le f(x)\}$. | 1 punct |
| 2. | Fie $x_0=0$. Cum $f(x)$ este funcție crescătoare pe $[0,1]$, atunci $0\le f(0)\in[0,1]$. Rezultă că $0\in A \Rightarrow A\neq\varnothing$. | 1 punct |
| 3. | Ordonăm crescător elementele mulțimei $A$. Șirul numeric, determinat de elementele mulțimii $A$, este crescător și marginit superior (de numărul 1). Conform teoremei lui Weierstrass el are margine superioară $a=\sup(A)$, $a\le 1$. | 1 punct |
| 4. | Deoarece $a=\sup(A)$ este cel mai mic dintre numerele $b\in[0,1]$, pentru care are loc inegalitatea $x\le b \quad \forall x\in A$, atunci este adevărată relația $a\le f(a)$. | 1 punct |
| 5. | Fie $a=\sup(A)=1$. Cum $a\le f(a)$ și $f(a)\in[0,1]$, obținem că $f(a)=1=a$. | 1 punct |
| 6. | Fie acum $a=\sup(A)<1$. Atunci $(a,1]\neq\varnothing$. Fie $x\in(a,1]$. Cum $f(x)$ este funcție crescătoare pe $[0,1]$, atunci $f(a)\le f(x) \quad \forall x\in(a,1]$. Deoarece $x>a$, atunci $x>\sup(A)$, adică $x\notin A$. Deaceea, conform definiției mulțimii $A$, avem $x>f(x)$. Prin urmare $f(a)\le f(x)<x \quad \forall x\in(a,1]$. Atunci $f(a)\le\inf\,(a,1]=a$. | 1 punct |
| 7. | Din ultima relație și inegalitatea $a\le f(a)$ rezultă că $f(a)=a$. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.