MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA
AGENŢIA NAŢIONALĂ PENTRU CURRICULUM ŞI EVALUARE

A 62 – A OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 3-4 martie 2018, clasa a XI – a
SOLUȚIILE PROBLEMELOR

11.1. Găsiți domeniul de valori E_f al funcției $f: R\setminus\{-1, 0,1\}\to R,$

$$f(x)=arctg\left(\frac{x}{x+1}\right)+arctg\left(\frac{x}{x-1}\right)-arctg\left(\frac{1}{2x^2}\right).$$

Soluție. Fie $x\in R\setminus\{-1,\ 0,\ 1\}=D_f$. Găsim derivata $f'(x)$ pe D_f. Cum $\left(arctg\ u\right)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$, atunci $\forall x\in D_f$:

$$f'(x)=\left(arctg\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)'+\left(arctg\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)'-\left(arctg\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right)'=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'+\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-1}\right)'-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{2x^2}\right)'=$$

$$=\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+x^2}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot1}{(x+1)^2}+\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+x^2}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-x\cdot1}{(x-1)^2}-\frac{(2x^2)^2}{(2x^2)^2+x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{x^3}=$$

$$=\frac{1}{2x^2+2x+1}+\frac{1}{2x^2-2x+1}+\frac{4x}{4x^4+1}=0.$$

Rezultă că $f(x)=Const$ pe orice interval de derivabilitate al funcției *f*. Deoarece funcția $f(x)$ are discontinuități în punctele $-1,0,1$, atunci valorile constante ale funcției $f(x)$ pot fi diferite pe intervalele de continuitate ale acestei funcții: $(-\infty;-1),(-1;0),(0;1),(1;+\infty)$. Așa cum, $f(-x)=f(x)$, atunci $f(x)$ este funcție pară. Deaceea, este suficient de considerat numai 2 intervale: $(0;1),(1;+\infty)$.

1). Fie $x\in(0;1)$, $f(x)=C_1$. Considerăm $x_0=0+\varepsilon, \varepsilon>0, \varepsilon<<1.$ Atunci

$$f(x_0)=arctg\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)+arctg\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)-arctg\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\right)=$$

$$=arctg\ 0+arctg\ 0-arctg\ (+\infty)=-\frac{\pi}{2}=C_1.$$

2). Fie $x\in(1;+\infty)$, $f(x)=C_2$. Considerăm $x_1=1+\varepsilon, \varepsilon>0, \varepsilon<<1.$ Atunci

$$f(x_1)=arctg\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon+2}\right)+arctg\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)-arctg\left(\frac{1}{2(1+\varepsilon)^2}\right)=$$

$$=arctg\ \frac{1}{2}+arctg\ (+\infty)-arctg\ \frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}=C_2.$$

Deci, $E_f=\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

11.2. Găsiți toate valorile parametrului $a\in R$, pentru care sistemul

$$\begin{cases} y=\sqrt{5+4x-x^2}+2 \\ y=\sqrt{9-a^2+2ax-x^2}+a \end{cases}$$

are exact o soluție în $R\times R$.

Soluție. Sistemul inițial este echivalent cu următorul sistem:

$$\begin{cases} (y-2)^2=5+4x-x^2, \\ y-2\ge 0, \quad 5+4x-x^2\ge 0, \\ (y-a)^2=9-a^2+2ax-x^2, \\ y-a\ge 0, \quad 9-a^2+2ax-x^2\ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2+(x-2)^2=9, \\ y-2\ge 0, \quad (x-2)^2\le 9, \\ (y-a)^2+(x-a)^2=9, \\ y-a\ge 0, \quad (x-a)^2\le 9. \end{cases}$$

Figura geometrică, care este determinată de relațiile scrise în primele 2 linii ale sistemului, este semicercul T_2 cu centrul $(2;2)$ și raza 3 (în plus $|x-2|\le 3 \Rightarrow x\in[-1;5]$). Analogic, figura geometrică, care este determinată de relațiile scrise în liniile 3 și 4 ale sistemului, este semicercul T_a cu centrul în punctul $(a;a)$ și raza 3 (în plus $x\in[a-3;a+3]$).

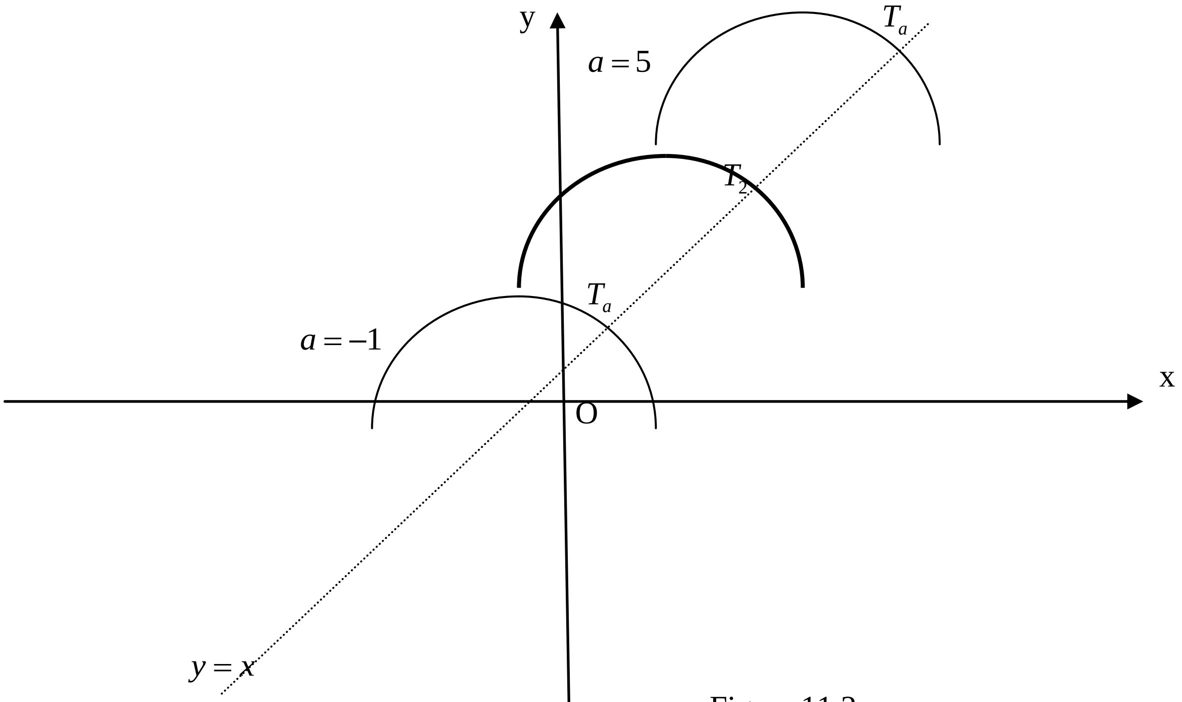
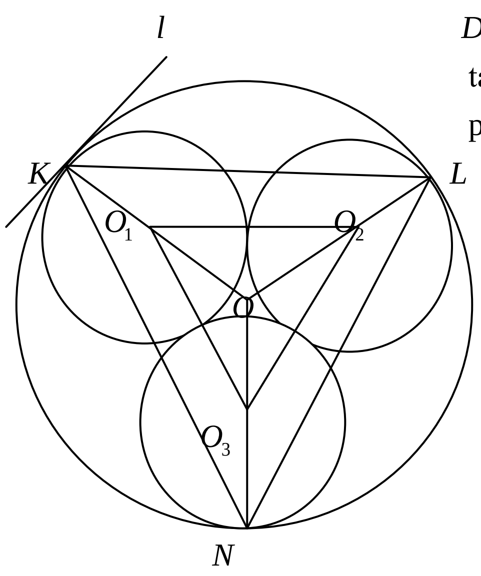


Figura 11.2

Așa cum razele aceste semicercuri T_a sunt aceleași (și sunt egale cu 3), iar centrele $(a;a)$ se află pe dreapta $y=x$, atunci (vezi Figura 11.2) aceste semicercuri T_a pot să se intersecteze cu semicercul fixat T_2 doar când $-1\le a\le 5$. Pentru $a\ne 2$ aceste semicercuri T_a se intersectează cu T_2 într-un punct, iar pentru $a=2$ avem $T_2\equiv T_a$. Deaceea, $a\in[-1;5]\setminus\{2\}$.

11.3. În interiorul unui cerc mare sunt construite trei cercuri mici congruente, astfel încât fiecare cerc mic este tangent la cercul mare și la celelalte două cercuri mici. Dintr-un punct arbitrar M, situat pe cercul mare și diferit de punctele de tangență, este dusă câte o tangentă la fiecare cerc mic. Fie l_1, l_2, l_3 - lungimile segmentelor tangentelor, duse din punctul M până la punctele respective de tangență situate pe cercurile mici. Demonstrați, că una dintre aceste lungimi este egală cu suma celorlalte două.

Soluție. *Lema 1.* Dacă K, L, N sunt punctele de tangență ale cercului mare cu cercurile mici, atunci triunghiul KLN este echilateral.

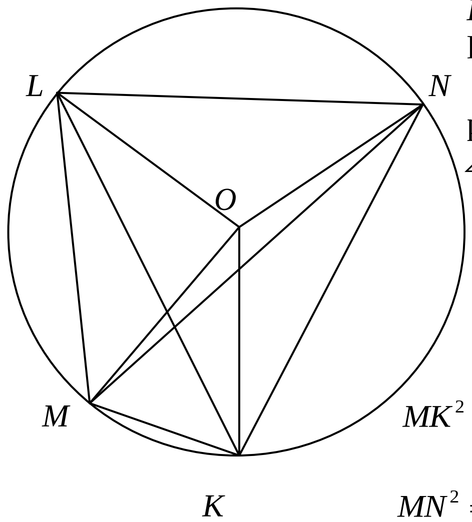


Demonstrație. Deoarece $KO_1 \perp l$ și $KO \perp l$ (unde l este tangentă la cercul cu centrul O_1 în punctul K), atunci punctele K, O_1 și O se află pe aceeași dreaptă. Analogic pentru punctele L, O_2 și O, și pentru N, O_3 și O. Dar triunghiul $O_1O_2O_3$ este echilateral ($O_1O_2 = O_1O_3 = O_2O_3 = 2r$). De aceea

$$\angle O_1OO_2 = 120° = \angle KON = \angle KOL = \angle LON.$$

Atunci $\Delta\ KOL \equiv \Delta\ LON \equiv \Delta\ KON$ ($OK = OL = ON = R$), adică $KL = LN = KN$. c.t.d.

Lema 2. Fie ω cercul circumscris triunghiului echilateral KLN, iar M un punct arbitrar pe ω. Dacă M aparține arcului deschis KL, atunci $MK + ML = MN$.



Demonstrație. Fie triunghiul KLN este echilateral cu latura a, punctul O este centrul cercului circumscris ω (adică $OK = OL = ON = R$), M este punct arbitrar pe ω, iar M aparține arcului deschis KL. Notăm $\angle MOL = \alpha$,atunci $\angle KOM = 120° - \alpha$ (adică $\angle LOK = \angle KON = \angle LON = 120°$).

Conform teoremei cosinusurilor pentru triunghiurile KOM, MOL, MON avem

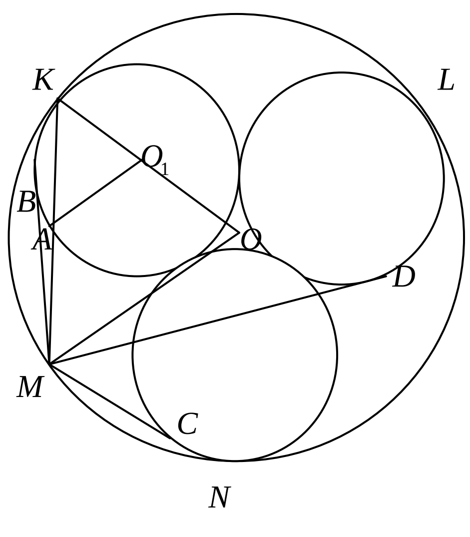
$$ML^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos\alpha = 4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$MK^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(120° - \alpha) = 4R^2 \sin^2 \left(60° - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$MN^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(120° + \alpha) = 4R^2 \sin^2 \left(60° + \frac{\alpha}{2}\right).$$ Atunci

$$MK + ML = 2R\sin\frac{\alpha}{2} + 2R\sin\left(60° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2R\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin\left(60° + \frac{\alpha}{2}\right) = MN.$$



Fie MK intersectează cercul cu centrul în punctul O_1 în punctul A, iar MB este tangenta la același cerc. Atunci conform teoremei referitoare la tangentă și secantă $MB^2 = MK \cdot MA$.
Triunghiurile O_1KA și OKM sunt isoscele (fiindcă $O_1K = O_1A = r$, $OK = OM = R$). Deaceea

$$\angle O_1AK = \angle O_1KA = \angle OKM = \angle OMK .$$

Atunci $O_1A \,||\, OM$ și conform teoremei lui Thales avem

$$\frac{MK}{MA} = \frac{OK}{OO_1} = \frac{R}{R-r},$$

$$MA = MK \cdot \frac{R-r}{R}.$$

Atunci

$$MB^2 = MK \cdot MK \frac{R-r}{R} = MK^2 \cdot \frac{R-r}{R},$$

$$MB = MK \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}}.$$

Pentru celelalte 2 tangente obținem analogic

$$MC = MN \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}}, \qquad MD = ML \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}}.$$

Conform Lemei 2 $MK + MN = ML$. Atunci

$$MB + MC = MK \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}} + MN \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}} =$$

$$= (MK + MN) \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}} = ML \cdot \sqrt{\frac{R-r}{R}} = MD.$$

c.t.d.

11.4. Demonstrați, că ecuația

$$[x]+[3x]+[9x]+[27x]+[81x]=19480$$

nu are soluții în R (prin $[\alpha]$ s-a notat partea întreagă a numărului real α).

Soluție. *Lema*. Pentru orice $k \in N$ este adevărată inegalitatea:

$$k \cdot [x] \le k \cdot x \le k \cdot [x] + (k-1).$$

Demonstrație. Notăm

$$[x] = n, \quad \{x\} = \alpha,$$

atunci

$$x = n + \alpha,\ \ n \le x,\ \ 0 \le \alpha < 1,\ \ n \in N\ \ .$$

Avem

$$k \cdot n = [k \cdot n] \le [k \cdot x] = [k \cdot n + k \cdot \alpha] \le k \cdot n + k \cdot \alpha \le k \cdot n + (k-1),$$

de unde rezultă inegalitatea cerută.

Aplicăm această inegalitate dublă pentru problema noastră:

$$[x]=[x]=[x],$$
$$3\cdot[x]\le[3x]\le 3\cdot[x]+2,$$
$$9\cdot[x]\le[9x]\le 9\cdot[x]+8,$$
$$27\cdot[x]\le[27x]\le 27\cdot[x]+26,$$
$$\underline{81\cdot[x]\le[81x]\le 81\cdot[x]+80}$$
$$121\cdot[x]\le 19480\le 121\cdot[x]+117$$

Cum $19480=121\cdot160+120$, obținem
$$121\cdot[x]\le121\cdot160+120\le121\cdot[x]+117.$$
Ultima inegalitate este imposibilă. Astfel, ecuația inițială nu are soluții în R. (**1 punct**)

11.5. Găsiți toate valorile parametrului $a\in R,$ pentru care sistemul
$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+6x+10y+34}+\sqrt{x^2+y^2+6x+6y+18}=2\\ y^2+x^2-4x+10=a\end{cases}$$
are soluție unică în $R\times R.$

Soluție. Vom rezolva acest sistem geometric. Soluțiile sistemului sunt punctele de intersecție ale curbelor plane determinate de ecuațiile sistemului. Sistemul inițial este echivalent cu următorul sistem:

$$\begin{cases}\sqrt{(x+3)^2+(y+5)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}=2\\ (x-2)^2+y^2=a-6\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a-6\ge0.$$

A doua ecuație a sistemului determină un cerc cu centrul în punctul $O(2;0)$ și raza $R=\sqrt{a-6}$ pentru $a>6$ sau un punct $O(2;0)$ pentru $a=6.$ Acest cerc are un centru fixat și o rază arbitrară, care depinde de parametrul a. Este necesar de găsit astfel de valori ale parametrului a, încât acest cerc să intersecteze graficul, determinat de prima ecuație, doar într-un singur punct.

Distanța între două puncte $A(x_1;y_1)$ și $B(x_2;y_2)$ poate fi găsită conform formulei
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$
Conform formulei distanței prima ecuație a sistemului arată că suma distanțelor de la punctul $M\ (x;y)$ până la punctele $A(-3;-5)$ și $B(-3;-3)$ este egală cu 2. Cum distanța dintre punctele A și B este egală cu 2, rezultă că punctul $M\ (x;y)\in[AB]$. Rezultă că locul geometric de puncte determinat de prima ecuație a sistemului este segmentul $[AB]$. Conform ipotezei, trebuie să aibă loc relațiile

$$OB\le R\le OA$$
$$OB^2\le R^2\le OA^2$$
$$5^2+3^2\le a-6\le5^2+5^2$$
$$40\le a\le56.$$

Astfel, $a\in[40;56].$

11.6. Fie cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punctul K este un punct interior al muchiei BB_1 astfel, încât $BK/KB_1=m$. Prin punctele K și C_1 este trasat un plan α, paralel dreptei BD_1.

a) Fie P punctul de intersecție al planului α cu dreapta A_1B_1. Găsiți valoarea raportului A_1P/PB_1.

b) Planul α divizează cubul în 2 părți. Găsiți raportul volumelor acestor părți.

Soluție. Trasăm $KF\,||\,BD_1$. Punctele K, B, D_1, B_1 aparțin planului (BB_1D_1D) (vezi Figura 11.6.1).

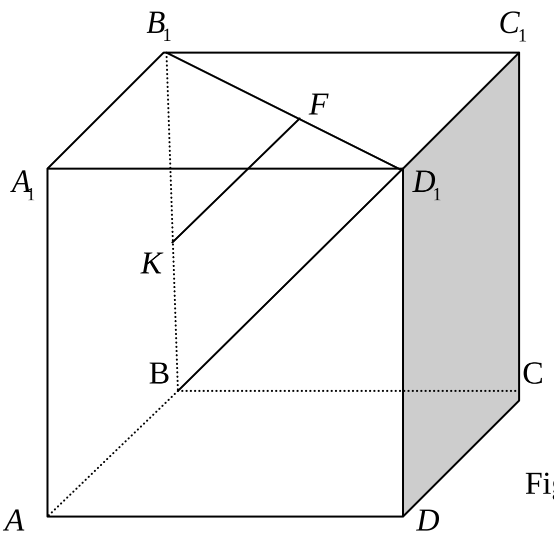


Figura 11.6.1

Avem $\Delta KB_1F \cong \Delta BB_1D_1$ (deoarece $KF \,||\, BD_1$). Conform teoremei lui Thales $\dfrac{B_1F}{FD_1} = \dfrac{B_1K}{KB} = \dfrac{1}{m}$. Rezultă că $FC_1 \cap A_1B_1 = \{P\}$. Dacă $P = A_1$, atunci punctul F este mijlocul lui B_1D_1 și $m=1$. Astfel, pentru $m=1$ avem $A_1P/PB_1 = 0$.

În continuare studiem 2 cazuri:

1. $P \in (B_1A_1)$ și $m>1$; 2. $P \in (B_1A_1$, $P \notin [B_1A_1]$ și $m<1$.

Cazul 1. $P \in (B_1A_1)$ și $m>1$ (vezi Figura 11.6.2) Atunci $\Delta B_1FP \cong \Delta D_1FC_1$ (fiindcă $A_1B_1 \,||\, C_1D_1$). Obținem

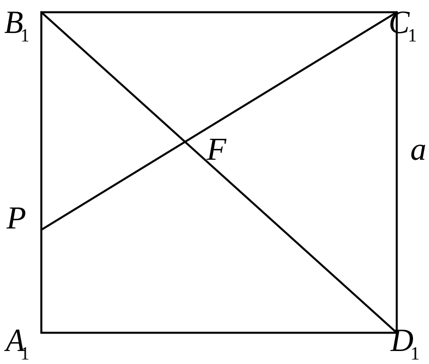


Figura 11.6.2

$$\frac{1}{m} = \frac{B_1F}{FD_1} = \frac{B_1P}{C_1D_1} = \frac{B_1P}{a}.$$

(a este muchia cubului). Atunci

$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{A_1B_1 - B_1P}{B_1P} = \frac{a}{B_1P} - 1 = m-1.$$

Avem

$$PB_1 = \frac{a}{m}, \qquad A_1P = a \cdot \frac{m-1}{m}.$$

În continuare, B_1PC_1K este o piramidă triunghiulară cu baza PB_1C_1 (triunghi dreptunghic) și înălțimea KB_1 (vezi Figura 11.6.3) .

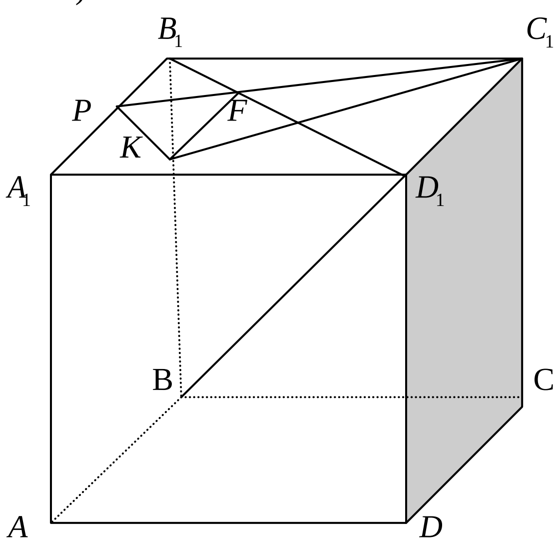


Figura 11.6.3

Atunci

$$V_{partea\,1}=V_{B_1PC_1K}=\frac{1}{3}\cdot A_{PB_1C_1}\cdot KB_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot PB_1\cdot B_1C_1\cdot KB_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{m}\cdot a\cdot\frac{a}{m+1}=\frac{a^3}{6m(m+1)},$$

$$V_{partea\,2}=V-V_{partea\,1}=a^3-\frac{a^3}{6m(m+1)}.$$

$$\frac{V_{partea\,1}}{V_{partea\,2}}=\frac{a^3/6m(m+1)}{a^3-a^3/6m(m+1)}=\frac{1}{6m(m+1)-1}=\frac{1}{6m^2+6m-1}.$$

Cazul 2. $P\in(B_1A_1,\ P\notin[B_1A_1]$ și $m<1$ (vezi Figura 11.6.4) .

Atunci punctul P aparține semidreptei $(B_1A_1$ și nu aparține segmentului $[B_1A_1]$. Analogic cazului 1 avem $\Delta B_1FP\cong\Delta D_1FC_1$ (fiindcă $A_1B_1\,||\,C_1D_1$). Obținem

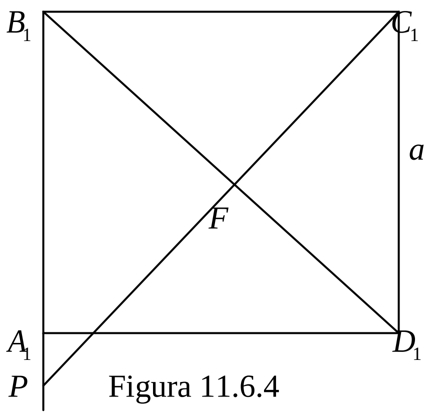


Figura 11.6.4

$$\frac{1}{m}=\frac{B_1F}{FD_1}=\frac{B_1P}{C_1D_1}=\frac{B_1P}{a}.$$

Atunci

$$\frac{A_1P}{PB_1}=\frac{B_1P-A_1B_1}{B_1P}=1-\frac{a}{a/m}=1-m.$$

Avem

$$PB_1=\frac{a}{m},\qquad A_1P=a\cdot\frac{1-m}{m}.$$

În continuare, planul α împarte cubul în 2 părți. Prima parte a cubului este trunchiul de piramidă $A_1MNB_1KC_1$ (unde $PK\cap AA_1=\{M\},\ PC_1\cap A_1D_1=\{N\}$). Volumul lui îl putem găsi ca diferență dintre volumele piramidelor triunghiulare PB_1KC_1 și PA_1MN , respectiv (vezi Figura 11.6.5) .

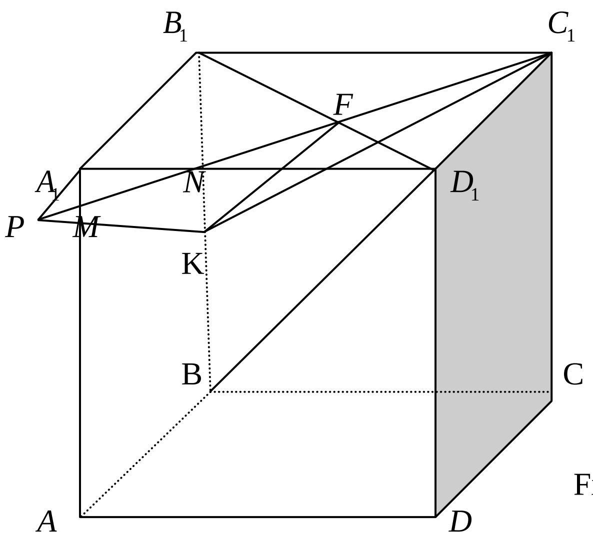


Figura 11.6.5

Atunci

$$V_1=V_{PB_1KC_1}=\frac{1}{3}\cdot A_{B_1KC_1}\cdot PB_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot B_1K\cdot B_1C_1\cdot PB_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{m+1}\cdot a\cdot\frac{a}{m}=\frac{a^3}{6m(m+1)}.$$

Avem $\Delta PA_1N\cong\Delta PB_1C_1$ (fiindcă $NA_1\,||\,B_1C_1$). Obținem $\dfrac{PA_1}{PB_1}=\dfrac{A_1N}{B_1C_1}\ \Rightarrow\ A_1N=a(1-m).$

Analogic $\Delta PA_1M\cong\Delta PB_1K$ (fiindcă $MA_1\,||\,BB_1$), de unde

$$\frac{PA_1}{PB_1}=\frac{A_1M}{B_1K}\ \Rightarrow\ A_1M=a\cdot\frac{1-m}{m+1}.$$

Atunci

$$V_2 = V_{PA_1MN} = \frac{1}{3}\cdot A_{A_1MN}\cdot PA_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot A_1M\cdot A_1N\cdot PA_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{a(1-m)}{m+1}\cdot a(1-m)\cdot\frac{a(1-m)}{m} = \frac{a^3(1-m)^3}{6m(m+1)}.$$

Astfel,

$$\frac{V_{partea\,1}}{V_{partea\,2}} = \frac{V_1 - V_2}{a^3 - (V_1 - V_2)} = \frac{a^3\cdot\dfrac{1-(1-m)^3}{6m(m+1)}}{a^3 - a^3\cdot\dfrac{1-(1-m)^3}{6m(m+1)}} = \frac{1-(1-m)^3}{6m(m+1)-(1-(1-m)^3)} = \frac{3-3m+m^2}{3+9m-m^2}.$$

11.7. Rezolvați ecuația $\sqrt{y\sqrt{5}} - \sqrt{x\sqrt{5}} = \sqrt{3\sqrt{5}-5}$ în numere raționale.

Soluție. Determinăm DVA al acestei ecuații:

$$\begin{cases} \sqrt{y\sqrt{5}} - \sqrt{x\sqrt{5}} \ge 0 \\ y \ge 0, \quad x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 \le x \le y.$$

Fie $x, y \in Q$. Ridicăm ambele părți ale ecuației la pătrat:

$$y\sqrt{5} - 2\sqrt{y\sqrt{5}}\cdot\sqrt{x\sqrt{5}} + x\sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 5$$
$$(y + x - 3)\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5xy} - 5 \qquad (*)$$
$$y + x - 3 = 2\sqrt{xy} - \sqrt{5}$$

Încă o dată ridicăm la pătrat:

$$(y+x-3)^2 = 4xy - 4\sqrt{xy}\cdot\sqrt{5} + 5 \;\Rightarrow\; 4\sqrt{5xy} = (4xy + 5 - (y+x-3)^2) \in Q$$

Rezultă că $\sqrt{5xy} \in Q$. Din **$(*)$** obținem că $2\sqrt{5xy} - 5 \in Q.$ Deoarece în partea stângă a ecuației (*) pentru $y + x - 3 \ne 0$ avem număr irațional, atunci trebuie să aibă loc sistemul de ecuații

$$\begin{cases} y + x - 3 = 0 \\ 2\sqrt{5xy} - 5 = 0 \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem și obținem 2 soluții: $(x; y) = \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ sau $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Luând în considerare DVA, rămâne doar soluția $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

11.8. Funcția $f:[0,1]\to[0,1]$ este crescătoare pe segmentul $[0,1]$. Demonstrați că există un număr $a\in[0,1]$, astfel încât $f(a) = a$.

Soluție. Considerăm mulțimea $A = \{x\in[0,1] \mid x \le f(x)\}$. Fie $x_0 = 0$. Cum $f(x)$ este funcție crescătoare pe $[0,1]$, atunci $0 \le f(0) \in [0,1]$. Deci, $0 \in A \Rightarrow A \ne \varnothing$.

Conform definiției $A \subseteq [0,1]$. Ordonăm crescător elementele mulțimei A. Șirul numeric, determinat de elementele mulțimii A, este crescător și marginit superior (de numărul 1). Conform teoremei lui Weierstrass el are margine superioară $a = \sup(A)$, $a \le 1$.

Fie $x \in A$, atunci $x \leq f(x)$. Așa cum $a = \sup(A)$, atunci $x \leq a \quad \forall x \in A$. Deoarece $f(x)$ este funcție crescătoare pe $[0,1]$, atunci $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in A$. Deci, $x \leq f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in A$.

Deoarece $a = \sup(A)$ este cel mai mic dintre numerele $b \in [0,1]$, pentru care are loc inegalitatea $x \leq b \quad \forall x \in A$, atunci este adevărată relația $a \leq f(a)$. Din această inegalitate rezultă, că $a \in A$.

Fie $a = \sup(A) = 1$. Cum $a \leq f(a)$ și $f(a) \in [0,1]$, obținem că $f(a) = 1 = a$.

Fie acum $a = \sup(A) < 1$. Atunci $(a,1] \neq \emptyset$. Fie $x \in (a,1]$. Cum $f(x)$ este funcție crescătoare pe $[0,1]$, atunci

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in (a,1].$$

Deoarece $x > a$, atunci $x > \sup(A)$, adică $x \notin A$. Deaceea, conform definiției mulțimii A, avem $x > f(x)$. Prin urmare

$$f(a) \leq f(x) < x \quad \forall x \in (a,1].$$

Atunci

$$f(a) \leq \inf\ (a,1] = a.$$

Din ultima relație și inegalitatea $a \leq f(a)$ rezultă că $f(a) = a$.