MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA
AGENȚIA NAȚIONALĂ PENTRU CURRICULUM ŞI EVALUARE

A 62 – A OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 3-4 martie 2018, clasa a XI – a, prima zi

11.1. Găsiți domeniul de valori E_f al funcției $f:\ R\setminus\{-1,0,1\}\to R$,

$$f(x)=arctg\left(\frac{x}{x+1}\right)+arctg\left(\frac{x}{x-1}\right)-arctg\left(\frac{1}{2x^2}\right).$$

11.2. Găsiți toate valorile parametrului $a\in R$, pentru care sistemul

$$\begin{cases} y=\sqrt{5+4x-x^2}+2 \\ y=\sqrt{9-a^2+2ax-x^2}+a \end{cases}$$

are exact o soluție în $R\times R$.

11.3. În interiorul unui cerc mare sunt construite trei cercuri mici congruente, astfel încât fiecare cerc mic este tangent la cercul mare și la celelalte două cercuri mici. Dintr-un punct arbitrar M, situat pe cercul mare și diferit de punctele de tangență, este dusă câte o tangentă la fiecare cerc mic. Fie l_1,l_2,l_3 - lungimile segmentelor tangentelor, duse din punctul M până la punctele respective de tangență situate pe cercurile mici. Demonstrați, că una dintre aceste lungimi este egală cu suma celorlalte două.

11.4. Demonstrați, că ecuația

$$[x]+[3x]+[9x]+[27x]+[81x]=19480$$

nu are soluții în R (prin $[\alpha]$ s-a notat partea întreagă a numărului real α).

Timp alocat - 4 ore astronomice
Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES!

A 62 – A OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 3-4 martie 2018, clasa a XI – a, ziua a doua

11.5. Găsiți toate valorile parametrului $a\in R,$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+6x+10y+34}+\sqrt{x^2+y^2+6x+6y+18}=2 \\ y^2+x^2-4x+10=a \end{cases}$$

are soluție unică în $R\times R$.

11.6. Fie cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punctul K este un punct interior al muchiei BB_1 astfel, încât $BK/KB_1=m$. Prin punctele K și C_1 este trasat un plan α, paralel dreptei BD_1.

a) Fie P punctul de intersecție al planului α cu dreapta A_1B_1. Găsiți valoarea raportului A_1P/PB_1.

b) Planul α divizează cubul în 2 părți. Găsiți raportul volumelor acestor părți.

11.7. Rezolvați ecuația $\sqrt{y\sqrt{5}}-\sqrt{x\sqrt{5}}=\sqrt{3\sqrt{5}-5}$ în numere raționale.

11.8. Funcția $f:[0,1]\to[0,1]$ este crescătoare pe segmentul $[0,1]$. Demonstrați că există un număr $a\in[0,1]$, astfel încât $f(a)=a$.

Timp alocat - 4 ore astronomice
Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES!

62-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 2 – 5 марта 2018, XI класс, первый день

11.1. Определите множество значений E_f для функции $f:\ R\setminus\{-1,\ 0,1\}\to R,$

$$f(x)=arctg\left(\frac{x}{x+1}\right)+arctg\left(\frac{x}{x-1}\right)-arctg\left(\frac{1}{2x^2}\right).$$

11.2. Найти все значения параметра $a\in R$, для которых система

$$\begin{cases} y=\sqrt{5+4x-x^2}+2 \\ y=\sqrt{9-a^2+2ax-x^2}+a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение в $R\times R$.

11.3. Внутри некоторой большой окружности построены три равные малые окружности так, что каждая малая окружность касается большой окружности и двух других малых окружностей. Из произвольной точки M на большой окружности, отличной от точек касания, проведено по одной касательной к каждой из трех равных окружностей. Пусть l_1,l_2,l_3 - длины отрезков касательных от точки M до соответствующих точек касания. Докажите, что одна из этих длин равна сумме двух других.

11.4. Доказать, что уравнение

$$[x]+[3x]+[9x]+[27x]+[81x]=19480$$

не имеет решений в R (через $[\alpha]$ обозначена целая часть действительного числа α).

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

62-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 3 – 4 марта 2018, XI класс, второй день

11.5. Найти все значения параметра $a\in R,$ для которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+6x+10y+34}+\sqrt{x^2+y^2+6x+6y+18}=2 \\ y^2+x^2-4x+10=a \end{cases}$$

имеет единственное решение в $R\times R$.

11.6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре BB_1 отмечена точка K такая, что $BK/KB_1=m$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

a) Пусть P точка пересечения плоскости α и прямой (A_1B_1). Найти отношение A_1P/PB_1.

b) Плоскость α делит куб на 2 части. Найти отношение объемов этих частей.

11.7. Решить уравнение $\sqrt{y\sqrt{5}}-\sqrt{x\sqrt{5}}=\sqrt{3\sqrt{5}-5}$ в рациональных числах.

11.8. Функция $f:[0,1]\to[0,1]$ является возрастающей на отрезке $[0,1]$. Доказать, что существует число $a\in[0,1]$ такое, что $f(a)=a$.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!