A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2 – 5 martie 2018

Clasa a XII-a, prima zi

SOLUȚII:

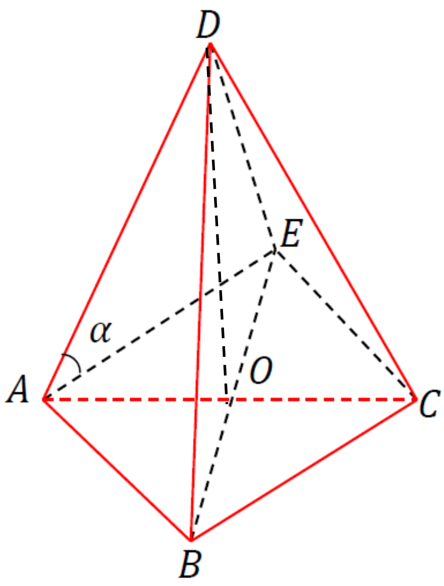
12.1.

a) $\int_1^e \frac{\ln^{2018} x}{x} dx = \frac{\ln^{2019} x}{2019}\Big|_1^e = \frac{1}{2019}$.

b) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln^{2018} x}{x+1} dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln^{2018} x}{x+1} dx + \int_1^e \frac{\ln^{2018} x}{x+1} dx$.

Observăm că $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln^{2018} x}{x+1} dx = \left| \begin{array}{c} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \\ x = \frac{1}{e} \Rightarrow t = e \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_1^e \frac{\ln^{2018} t}{t(t+1)} dt$. Atunci $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln^{2018} x}{x+1} dx =$

$= \int_1^e \frac{\ln^{2018} x}{x(x+1)} dx + \int_1^e \frac{\ln^{2018} x}{x+1} dx = \int_1^e \frac{\ln^{2018} x}{x} dx = \frac{1}{2019}$.



12.2. Construim segmentul AE, astfel încât $AE = BC$ și $AE \parallel BC$. Fie φ măsura unghiului format de dreptele AD și BC. Atunci $m(\angle DAE) = \varphi$. Din construcție $ABCE$ este un paralelogram, în care are loc: $BE^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$.

Întrucât DO este mediană în triunghiul ADC, obținem:

$$4OD^2 = 2a_1^2 + 2c_1^2 - b^2.$$

În mod similar, DO este mediană în triunghiul BDE, de unde obținem:

$$4OD^2 = 2b_1^2 + 2DE^2 - BE^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4OD^2 = 2b_1^2 + 2DE^2 - 2a^2 - 2c^2 + b^2.$$

Astfel: $DE^2 = a_1^2 + c_1^2 + a^2 + c^2 - b^2 - b_1^2$.

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul DAE și obținem:

$$DE^2 = a_1^2 + a^2 - 2a_1 a \cos\varphi.$$

Atunci $\cos\varphi = \frac{b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2}{2a_1 a}$. Unghiul φ este ascuțit, de unde $\varphi = \arccos\left|\frac{b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2}{2a_1 a}\right|$.

12.3. Metoda I, $\Delta = \begin{vmatrix} 421 & 214 & 142 \\ 142 & 421 & 214 \\ 214 & 142 & 421 \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 100 \\ 1 & 100 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 100 \\ 1 & 100 & 10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (10^3 + 10^3 + 10^3 - 1 - 10^3 - 10^6)(8 + 8 + 8 - 1 - 64 - 8) =$$

$$= (10^3 - 1)^2 \cdot 7^2 = (999 \cdot 7)^2.$$

Metoda II. $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + \; c^3 - 3abc.. = (a+b+c)(a^2+b^2+\;c^2 - ab - ac - bc)$, de unde . $\Delta = (999 \cdot 7)^2$......

12.4. a) Aplicând metoda integrării prin părți, obținem $f(x+1) = \int_0^1 \left(e^{-t}t^x + \frac{1}{e}\right) dt =$

$$= \left(-e^{-t}t^x\right)\Big|_0^1 + x\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt + \frac{1}{e} = x\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt = x\int_0^1 \left(e^{-t}t^x + \frac{1}{e}\right)dt - \frac{x}{e} =$$

$$= xf(x) - \frac{x}{e}.$$

b) $f(1) = \int_0^1 \left(e^{-t} + \frac{1}{e}\right) dt = 1;\ f(2) = f(1) - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e};$

$$f(3) = 2f(2) - \frac{2}{e} = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \frac{2}{e};\ f(4) = 3f(3) - \frac{3}{e} = 3! - \frac{1}{e}(A_3^3 + A_3^2 + A_3^1);$$

$$f(5) = 4f(4) - \frac{4}{e} = 4! - \frac{1}{e}(A_4^4 + A_4^3 + A_4^2 + A_4^1);$$

Utilizând metoda inducției matematice, demonstrăm că

$$f(n+1) = n! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n-1} A_n^{n-k}.$$

Într-adevăr:

$$f(n+2) = (n+1)f(n+1) - \frac{n+1}{e} = (n+1)\left(n! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n-1} A_n^{n-k}\right) - \frac{A_{n+1}^1}{e}$$

$$= (n+1)! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} A_{n+1}^{n+1-k}.$$

Obținem $a_n = f(n+1)$. Întrucât $e^{-t}t^n + \frac{1}{e} \geq 0, \forall t \in [0;1], n \geq 1$, obținem că

$$a_n = \int_0^1 \left(e^{-t}t^n + \frac{1}{e}\right) dt \;\geq 0, n \geq 1.$$

Vom arăta că $(a_n)_{n\geq1}$ este monoton descrescător. Într-adevăr, $a_n - a_{n+1} = f(n+1) - f(n+2) = \int_0^1 e^{-t}(t^n - t^{n+1})\, dt = \int_0^1 e^{-t}t^n(1-t)\, dt > 0, n \geq 1.$

Șirul $(a_n)_{n\geq1}$, fiind monoton și mărginit, este și convergent.