

A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2 – 5 martie 2018

Clasa a XII-a, prima zi

12.1. a) Calculați: $\int_1^{e^{\ln^{2018} x}} \frac{dx}{x}$. b) Calculați: $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln^{2018} x}{x+1} dx$.

12.2. Fie piramida $ABCD$, în care $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a_1$, $DB = b_1$, $DC = c_1$. Determinați măsura unghiului ascuțit format de dreptele suport ale muchiilor AD și BC .

12.3. Arătați că valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} 421 & 214 & 142 \\ 142 & 421 & 214 \\ 214 & 142 & 421 \end{vmatrix}$ este un pătrat perfect.

12.4. Fie funcția $f: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 \left(e^{-t} t^{x-1} + \frac{1}{e} \right) dt$.

a) Arătați că $f(x+1) = xf(x) - \frac{x}{e}$, $\forall x \in [1; +\infty)$.

b) Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = n! - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n-1} A_n^{n-k}$, unde A_n^m este numărul de aranjamente din n elemente luate câte m . Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

Timp alocat - 4 ore astronomice

MULT SUCCES!

62-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 2 – 5 марта 2018

XII класс, первый день

12.1. a) Вычислите: $\int_1^{e^{\ln^{2018} x}} \frac{dx}{x}$. b) Вычислите: $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln^{2018} x}{x+1} dx$.

12.2. В пирамиде $ABCD$ дано $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a_1$, $DB = b_1$, $DC = c_1$. Найдите величину острого угла между несущими прямыми ребер AD и BC .

12.3. Покажите, что значение определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 421 & 214 & 142 \\ 142 & 421 & 214 \\ 214 & 142 & 421 \end{vmatrix}$ является полным квадратом.

12.4. Дана функция $f: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 \left(e^{-t} t^{x-1} + \frac{1}{e} \right) dt$.

a) Покажите, что $f(x+1) = xf(x) - \frac{x}{e}$, $\forall x \in [1; +\infty)$.

b) Дана последовательность $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = n! - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n-1} A_n^{n-k}$, где A_n^m есть количество размещений из n элементов по m . Докажите, что последовательность $(a_n)_{n \geq 1}$ является сходящейся.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!