A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2 – 5 martie 2018

Clasa a XII-a, ziua a doua

SOLUȚII:

12.5.

a) $I=\int_0^1 arctg\sqrt[3]{x}\,dx=\left|\begin{matrix} x=t^3\\ dx=3t^2dt\\ t\in[0;1]\end{matrix}\right|=3\int_0^1 t^2 arctg\,t\,dt=$

$$=\left|\begin{matrix} u(t)=arctgt & dv(t)=3t^2dt\\ du(t)=\dfrac{1}{1+t^2}dt & v(t)=t^3\end{matrix}\right|= t^3 arctg\,t\Big|_0^1-\int_0^1\frac{t^3}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{t^3+t-t}{t^2+1}dt$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

$$J=\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-\frac{x}{3}\right)dx=\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{7}{12}.$$

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=arctgx-x+\frac{x^3}{3}$.

Atunci $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+x^2-1=\frac{x^4}{x^2+1}\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, ceea ce implică faptul că funcția f este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$. Pentru $x\geq 0$ obținem

$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow arctgx-x+\frac{x^3}{3}\geq 0\Leftrightarrow arctgx\geq x-\frac{x^3}{3}$.

Atunci $\int_0^1 arctg\sqrt[3]{x}\,dx>\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-\frac{x}{3}\right)dx\Leftrightarrow I>J\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2>\frac{7}{12}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+\ln 2>\frac{13}{6}$.

12.6. Fie $APNM$ planul secant. Fie K piciorul înălțimii coborâte din punctul C pe planul secțiunii $APMN$. Atunci $K\in AN$. Fie T punctul de intersecție al dreptei CD cu planul secant. Atunci dreapta TK reprezintă proiecția dreptei CD pe planul secant, iar $m(\angle CTK)=30°$. Obținem $CT=10$ și $CK=5$. Deoarece $AC=5\sqrt{2}$ obținem $m(\angle CAK)=45°$. Atunci $AO=\frac{5\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$

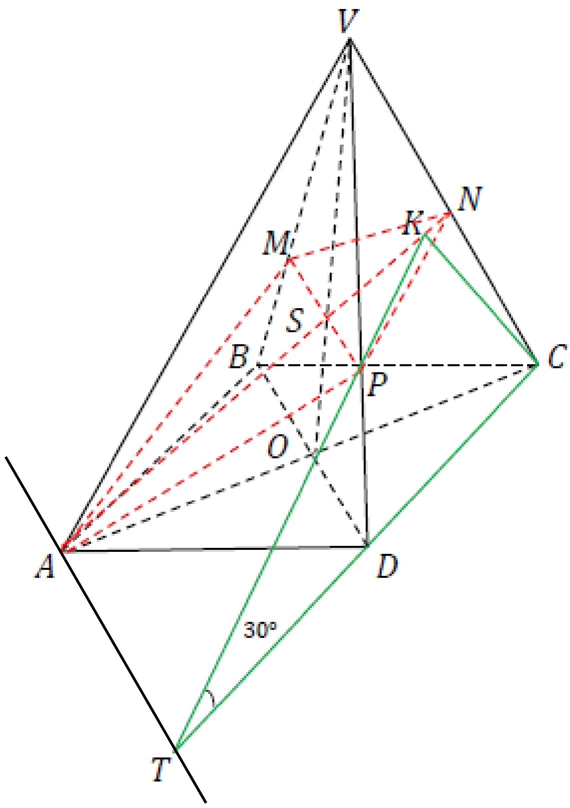
$$\Rightarrow SO=\frac{5\sqrt{2}}{2}, VS=10\sqrt{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{15\sqrt{2}}{2}.$$

$\Delta VMP\sim\Delta VBD\Rightarrow\frac{\frac{15\sqrt{2}}{2}}{10\sqrt{2}}=\frac{MP}{5\sqrt{2}}\Rightarrow MP=\frac{15\sqrt{2}}{4}$.

$$tg\,(\angle OCV)=\frac{VO}{OC}=4\Rightarrow\frac{1}{\cos^2(\angle OCV)}=17\Rightarrow$$

$\Rightarrow\cos^2(\angle OCV)=\frac{1}{17}$ și $\sin^2(\angle OCV)=\frac{16}{17}$.

Atunci $m(\angle ANC)=180°-45°-m(\angle OCV)\Rightarrow$ $\sin(\angle ANC)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\angle OCV)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\angle OCV)=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}$. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul ANC, obținem $\frac{AN}{\sin(\angle OCV)}=\frac{AC}{\sin(\angle ANC)}\Rightarrow AN=8$. Triunghiurile MNP și AMP sunt isoscele, ceea ce implică $MP\perp AN$. Atunci $\mathcal{A}_{APMN}=\frac{1}{2}AN\cdot MP=15\sqrt{2}$.



12.7. $(xf(x))' = g(x), (xg(x))' = f(x)$ implică

$$\begin{cases}(xf(x))' + (xg(x))' = f(x) + g(x)\\ (xf(x))' - (xg(x))' = g(x) - f(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) + g(x) + x\big(f(x) + g(x)\big)' = f(x) + g(x)\\ f(x) - g(x) + x\big(f(x) - g(x)\big)' = g(x) - f(x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\big(f(x) + g(x)\big)' = 0\\ x\big(f(x) - g(x)\big)' = 2\big(g(x) - f(x)\big)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) + g(x) = C\\ x\big(f(x) - g(x)\big)' = 2\big(g(x) - f(x)\big)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}f(x) = C - g(x)\\ x\big(C - 2g(x)\big)' = 2(2g(x) - C)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) = C - g(x)\\ -2x\big(g(x)\big)' = 2(2g(x) - C)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}f(x) = C - g(x)\\ x\big(g(x)\big)' = C - 2g(x)\end{cases}.$$

Dacă $g(x) = \frac{C}{2}$ atunci $f(x) = g(x) = C, C \in \mathbb{R}$.

Dacă $g(x) \neq \frac{C}{2}$ atunci $x\big(g(x)\big)' = C - 2g(x) \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{C-2g(x)} = \frac{1}{x}$. Integrând ambele părți, obținem: $-\frac{1}{2}\ln|C - 2g(x)| = \ln|Kx|,\ K \neq 0$, care implică $g(x) = C - \frac{1}{Kx^2}$ și $f(x) = C + \frac{1}{Kx^2}, K \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$.

12.8. Are loc: $6A^4 - A^3 - A + 6I_2 = (3A^2 + 4A + 3I_2)(2A^2 - 3A + 2I_2)$.

Atunci $\det(3A^2 + 4A + 3I_2) \cdot \det(2A^2 - 3A + 2I_2) = 0$.

Fie $\det(3A^2 + 4A + 3I_2) = 0$. Întrucât $3A^2 + 4A + 3I_2 = 3(A - \lambda I_2)(A - \beta I_2)$, unde $\lambda = \frac{-2+\sqrt{5}\,i}{3}, \beta = \frac{-2-\sqrt{5}\,i}{3}$ avem că $\det(A - \lambda I_2) = 0$ sau $\det(A - \beta I_2) = 0$. Utilizând proprietățile: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, relația $\det(A - \lambda I_2) = 0$ implică $\det\big(A - \bar{\lambda} I_2\big) = 0$, adică $\det(A - \beta I_2) = 0$.

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Atunci $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{pmatrix}$ și $A - \beta I_2 = \begin{pmatrix} a-\beta & b\\ c & d-\beta\end{pmatrix}$.

Astfel $\begin{cases}(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0\\ (a-\beta)(d-\beta) - bc = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ad - bc + \lambda^2 - \lambda(a+d) = 0\\ ad - bc + \beta^2 - \beta(a+d) = 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\det A + \lambda^2 - \lambda(a+d) = 0\\ \det A + \beta^2 - \beta(a+d) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\det A + \lambda^2 + \beta^2 - (a+d)(\lambda+\beta) = 0\\ \lambda^2 - \beta^2 - (a+d)(\lambda-\beta) = 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\det A + \lambda^2 + \beta^2 - (a+d)(\lambda+\beta) = 0\\ a + d = \lambda + \beta\end{cases}.$$

Atunci $\Leftrightarrow \begin{cases}\det A = \lambda\beta\\ a + d = \lambda + \beta\end{cases}$. Astfel $\det A = 1$.

În mod similar se arată că dacă $\det(2A^2 - 3A + 2I_2) = 0$ atunci $\det A = 1$.