A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2 – 5 martie 2018

Clasa a XII-a, ziua a doua

12.5. a) Calculați $I = \int_0^1 arctg\sqrt[3]{x}\,dx$ și $J = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}\right) dx$.

b) Arătați că $\frac{\pi}{2} + \ln 2 > \frac{13}{6}$.

12.6. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, în care lungimea laturii bazei $ABCD$ este egală cu 5, iar lungimea înălțimii piramidei este egală cu $10\sqrt{2}$. Piramida este secționată cu un plan ce trece prin vârful A și este paralel cu diagonala BD a bazei, astfel încât dreapta AB formează cu acest plan un unghi de $30°$. Determinați aria secțiunii obținute.

12.7. Determinați toate perechile de funcții derivabile $f, g: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, astfel încât $xf(x)$ este o primitivă a funcției $g(x)$ și $xg(x)$ este o primitivă a funcției $f(x)$.

12.8. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, astfel încât $\det(6A^4 - A^3 - A + 6I_2) = 0$. Arătați că $\det A = 1$.

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.
Timp alocat - 4 ore astronomice

MULT SUCCES!

62-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 2 – 5 марта 2018

XII класс, второй день

12.5. a) Вычислите $I = \int_0^1 arctg\sqrt[3]{x}\ dx$ и $J = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}\right) dx$;

b) Покажите, что $\frac{\pi}{2} + \ln 2 > \frac{13}{6}$.

12.6. В правильной четырёхугольной пирамиде $VABCD$ длина стороны основания $ABCD$ равна 5, а длина высоты равна $10\sqrt{2}$. Пирамида пересечена плоскостью проходящей через вершину A параллельно диагонали BD основания так, что прямая AB образует угол $30°$ с этой плоскостью. Найдите площадь полученного сечения.

12.7. Найдите все пары дифференцируемых функций $f, g: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ такие, что $xf(x)$ является первообразной функции $g(x)$ и $xg(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

12.8. Пусть $A \in M_2(\mathbb{R})$, при которой $\det(6A^4 - A^3 - A + 6I_2) = 0$. Покажите, что $\det A = 1$.

Время выполнения – 4 астрономических часа
Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!