MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA
AGENȚIA NAȚIONALĂ PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE
A 62-A OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău 02-05 martie 2018, clasa a VII-a, prima zi

Soluții

7.1. Deoarece $2+2^2+2^3+2^4=30$,atunci

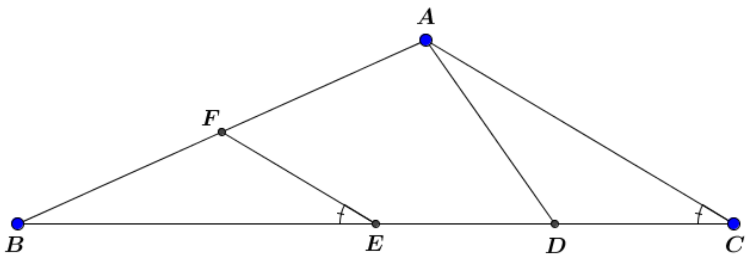
$$2+2^2+2^3+\ldots+2^{2016}=(2+2^2+2^3+2^4)+2^4(2+2^2+2^3+2^4)+\ \ldots+\ 2^{2012}(2+2^2+2^3+2^4)=$$

$$30+30\cdot 2^4+\ldots+30\cdot 2^{2012}=30(1+2^4+2^8+\ \ldots\ +2^{2012})=M30.$$

Deoarece $5+5^2=30$, atunci $5+5^2+5^3+\cdots+5^{2016}=(5+5^2)+(5^3+5^4)+(5^5+5^6)+\cdots+(5^{2015}+5^{2016})=30+5^2\cdot(5+5^2)+5^4\cdot(5+5^2)+\cdots+5^{2014}\cdot(5+5^2)=30+30\cdot 5^2+30\cdot 5^4+$
$+\cdots+30\cdot 5^{2014}=30\cdot(1+5^2+5^4+\cdots+5^{2014})\,\vdots\,30$.

Astfel numărătorul și numitorul sunt divizibile cu 30 . Deci, fracția $\dfrac{2+2^2+2^3+\ldots+2^{2016}}{5+5^2+5^3+\ldots+5^{2016}}$ se poate simplifica prin 30 .

7.2. Fie E mijlocul lui $[BC]$ și F mijlocul lui $[AB]$. Deoarece $[EF]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC , rezultă că $EF\parallel AC$ și $2\cdot EF=AC$. Având în vedere și faptul că $2\cdot AC=BC$, rezultă că $4\cdot EF=BC$. Dar, deoarece $4\cdot CD=BC$, conchidem că $EF=CD$. Mai remarcăm și faptul că $\sphericalangle BEF\equiv\sphericalangle ACD$ și $[EB]\equiv[AC]$. Prin urmare $\triangle BEF\equiv\triangle ACD$ (LUL), de unde $[BF]\equiv[AD]$ și, cum $2\cdot BF=AB$, conchidem că $\dfrac{AB}{AD}=2.$



7.3. Se poate deduce că primil număr de pe linia n are forma $\dfrac{(n-1)n}{2}+1,$ iar ultimul număr de pe aceiași linie are forma $\dfrac{n(n+1)}{2}$.Deci, pe linia 100 se află numerele $4951,\quad 4952,\ldots,5050.$ Suma lor este egală cu $\dfrac{(4951+5050)\cdot 100}{2}=500050.$ Pentru a obţine linia pe care se află numărul 2018 , scriem relaţia $\dfrac{(n-1)n}{2}+1\le 2018\le\dfrac{n(n+1)}{2}$.Obţinem sistemul $\begin{cases}(n-1)\cdot n\le 4034\\ n\cdot(n+1)\ge 4036\end{cases}$. Prin estimări se obţine că 2018 este al doilea număr din linia 64.

7.4. Numărul $m=2\underbrace{00\ldots0}_{99-cifre}3\underbrace{00\ldots0}_{99-cifre}1=2\underbrace{00\ldots0}_{200-ori}+3\underbrace{00\ldots0}_{100-ori}+1=2\cdot10^{200}+3\cdot10^{100}+1$. Numărul

$n=\underbrace{22\ldots2}_{100-cifre}5\underbrace{33\ldots3}_{99-cifre}4\underbrace{11\ldots1}_{100-cifre}=\underbrace{22\ldots2}_{100-ori}\underbrace{00\ldots0}_{201-ori}+5\underbrace{00\ldots0}_{200-ori}+\underbrace{33\ldots3}_{99-ori}\underbrace{00\ldots0}_{101-ori}+4\underbrace{00\ldots0}_{100-ori}+\underbrace{11..1}_{100-ori}=$

$2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{100-ori}\cdot10^{201}+5\cdot10^{200}+3\cdot\underbrace{11\ldots1}_{99-ori}\cdot10^{101}+4\cdot10^{100}+\underbrace{11\ldots1}_{100-ori}=2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{100-ori}0\cdot10^{200}+$

$+5\cdot10^{200}+3\cdot\underbrace{11\ldots1}_{99-ori}0\cdot10^{100}+4\cdot10^{100}+\underbrace{11\ldots1}_{100-ori}=2\cdot\Big(\underbrace{11\ldots1}_{101-ori}-1\Big)\cdot10^{200}+5\cdot10^{200}+$

$+3\cdot\Big(\underbrace{11\ldots1}_{101-ori}-1\underbrace{00\ldots0}_{99-ori}1\Big)\cdot10^{100}+4\cdot10^{100}+\underbrace{11\ldots1}_{101-ori}-1\underbrace{00\ldots0}_{100-ori}$. Notăm $\underbrace{11\ldots1}_{101-ori}=a$, atunci numărul n are forma $n=2\cdot(a-1)\cdot10^{200}+5\cdot10^{200}+3\cdot(a-10^{100}-1)\cdot10^{100}+4\cdot10^{100}+a-1\underbrace{00\ldots0}_{100-ori}=$

$=2a\cdot10^{200}-2\cdot10^{200}+5\cdot10^{200}+3a\cdot10^{100}-3\cdot10^{200}-3\cdot10^{100}+4\cdot10^{100}+a-10^{100}=$

$a\cdot(2\cdot10^{200}+3\cdot10^{100}+1)+10^{200}\cdot(5-2-3)+10^{100}\cdot(4-3-1)=a\cdot m$. Cum $n=a\cdot m$, rezultă că numărul n se divide cu numărul m.

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA
AGENȚIA NAȚIONALĂ PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE
A 62-A OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău 02-05 martie 2018, clasa a VII-a, prima zi

Barem de corectare

Problema 7.1.	**Punctaj acordat**
Obținerea $2+2^2+2^3+2^4=30$	1 punct
Scrierea $2+2^2+2^3+...+2^{2016}=(2+2^2+2^3+2^4)+2^4(2+2^2+2^3+2^4)+\ ...$ $+\ 2^{2012}(2+2^2+2^3+2^4)=$	1 punct
Obținerea $2+2^2+2^3+\cdots+2^{2016}=30\cdot(1+2^4+2^8+\cdots+2^{2012})\ \vdots\ 30$	1 punct
Obținerea $5+5^2=30$	1 punct
Scrierea $5+5^2+5^3+\cdots+5^{2016}=30+5^2\cdot(5+5^2)+5^4\cdot(5+5^2)+\cdots+5^{2014}\cdot(5+5^2)$	1 punct
Obținerea $5+5^2+5^3+\cdots+5^{2016}=30\cdot(1+5^2+5^4+\cdots+5^{2014})\ \vdots\ 30$	1 punct
Stabilirea că fracția se simplifică prin 30	1 punct
Total	7 puncte

Problema 7.2.	**Punctaj acordat**
Reprezentarea corectă a desenului	1 punct
Construirea E mijlocul lui $[BC]$ și F mijlocul lui $[AB]$	1 punct
Obținerea $4\cdot EF=BC$	1 punct
Obținerea $EF=CD$	1 punct
Obținerea $\measuredangle BEF\equiv\measuredangle ACD$ și $[EB]\equiv[AC]$	1 punct
Obținerea $\triangle BEF\equiv\triangle ACD$ și deducerea $[BF]\equiv[AD]$	1 punct
Obținerea $\dfrac{AB}{AD}=2.$	1 punct
Total	7 puncte

Problema 7.3.	**Punctaj acordat**
Deducerea că primul număr de pe linia *n* are forma $\dfrac{(n-1)n}{2}+1$	1 punct
Deducerea că ultimul număr de pe aceeași linie are forma $\dfrac{n(n+1)}{2}.$	1 punct
Obținerea că pe linia 100 se află numerele $4951,\quad 4952,\ldots,5050$	1 punct
Obținerea că suma numerelor de pe linia 100 este 500050	1 punct
Scrierea $\dfrac{(n-1)n}{2}+1\le 2018\le\dfrac{n(n+1)}{2}.$	1 punct
Obținem sistemul $\begin{cases}(n-1)\cdot n\le 4034\\ n\cdot(n+1)\ge 4036\end{cases}$	1 punct
Deducerea că 2018 se află pe linia 64.	1 punct
Total	7 puncte

Problema 7.4.	Punctaj acordat
Scrierea $m = 2 \cdot 10^{200} + 3 \cdot 10^{100} + 1$	1 punct
Scrierea $n = 2 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{100-ori}0 \cdot 10^{200} + 5 \cdot 10^{200} + 3 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{99-ori}0 \cdot 10^{100} + 4 \cdot 10^{100} + \underbrace{11\ldots1}_{100-ori}$	1 punct
Scrierea $\underbrace{11\ldots1}_{100-ori}0 = \underbrace{11\ldots1}_{101-ori} - 1$	1 punct
Scrierea $\underbrace{11\ldots1}_{99-ori}0 = \underbrace{11\ldots1}_{101-ori} - 1\underbrace{00\ldots0}_{99-ori}1$	1 punct
Scrierea $\underbrace{11\ldots1}_{100-ori} = \underbrace{11\ldots1}_{101-ori} - 1\underbrace{00\ldots0}_{100-ori}$	1 punct
Obținerea $n = a \cdot m$, unde $a = \underbrace{11\ldots1}_{101-ori}$	1 punct
Deducerea că n se divide cu numărul m	1 punct
Total	7 puncte