

SOLUȚII

Problema 8.1:

Soluție:

$$\begin{aligned} \left[\frac{10^{33}}{10^{11} + 7} \right] &= \left[\frac{\left((10^{11})^3 + 7^3 \right) - 7^3}{10^{11} + 7} \right] = \left[\frac{(10^{11} + 7) \left((10^{11})^2 - 10^{11} \cdot 7 + 7^2 \right) - 7^3}{10^{11} + 7} \right] = \\ &= \left[10^{22} - 7 \cdot 10^{11} + 7^2 - \frac{7^3}{10^{11} + 7} \right] = 10^{22} - 7 \cdot 10^{11} + 49 - 1 = 10^{22} - 7 \cdot 10^{11} + 48. \end{aligned}$$

Deci ultimele cifre sunt de la stânga la dreapta 0; 4; 8.

Problema 8. 2:

Soluție: În sistemul de coordonate xOy considerăm punctele $A(1; 4)$ $A_1(1; 0)$ $M(x; 0)$ $B(7; -4)$ $B_1(7; 0)$ $C(1; -4)$. Triunghiurile AA_1M , BB_1M și ACB sunt dreptunghice.

Conform teoremei Pitagora

$$AM = \sqrt{AA_1^2 + A_1M^2} = \sqrt{4^2 + (x-1)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 17}$$

$$BM = \sqrt{BB_1^2 + B_1M^2} = \sqrt{4^2 + (x-7)^2} = \sqrt{x^2 - 14x + 65}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (4-(-4))^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

Din triunghiul ABM avem: $AM + BM \geq AB$ adică $\sqrt{x^2 - 2x + 17} + \sqrt{x^2 - 14x + 65} \geq 10$.

Problema 8. 3:

Soluție: Notăm $BC = x$

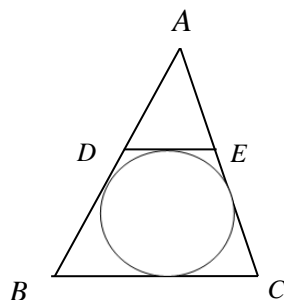
$$\begin{aligned} \text{Atunci} \cdot P_{\triangle ADE} &= DE + (AB - BD) + (AC - CE) = DE + (AB + AC + BC) - BC - (BD + CE) = \\ &= DE + 8 - BC - (DE + BC) = 8 - 2BC = 8 - 2x \end{aligned}$$

Din asemănarea triunghiurilor ADE și ABC avem $\frac{DE}{x} = \frac{DE}{BC} = \frac{P_{\triangle ADE}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{8-2x}{8}$ și, deci

$$DE = \frac{x(8-2x)}{8} = \frac{1}{4}(4x - x^2) = \frac{1}{4}(4 - (4 - 4x + x^2)) = \frac{1}{4}(4 - (x-2)^2) = 1 - \frac{1}{4}(x-2)^2.$$

Această expresie atinge valoarea maximală pentru $x = 2$.

Astfel $DE_{\max} = 1 \text{ cm}$.



Problema 8. 4:

Soluție:

Fie $ABCDEFG$ heptagonul dat. Notăm culoarea majoritară cu a și cea minoritară cu b . Sunt posibile următoarele variante ale raportului dintre numărul vârfurilor colorate cu a și numărul vârfurilor colorate cu b :

I) 6:1

II) 5:2

III) 4:3

În prima variantă este reprezentativ cazul $A_b B_a C_a D_a E_a F_a G_a$ (indicele reprezintă culoarea vârfului respectiv). Avem triunghiurile $B_a C_a D_a$, $C_a D_a E_a$, $D_a E_a F_a$.

Pentru varianta II sunt reprezentative cazurile

1) $A_b B_b C_a D_a E_a F_a G_a$

2) $A_b B_a C_b D_a E_a F_a G_a$

3) $A_b B_a C_a D_b E_a F_a G_a$

În primul caz avem triunghiurile $C_a D_a E_a$, $D_a E_a F_a$, $E_a F_a G_a$

În cazul 2) $D_a E_a F_a$, $E_a F_a G_a$, $B_a E_a G_a$

În cazul 3) avem triunghiurile $E_a F_a G_a$, $B_a E_a G_a$, $B_a F_a E_a$

Pentru varianta III sunt reprezentative cazurile

1) $A_b B_b C_b D_a E_a F_a G_a$

2) $A_b B_b C_a D_b E_a F_a G_a$

3) $A_b B_b C_a D_a E_d F_a G_a$

4) $A_b B_a C_b D_a E_b F_a G_a$

În cazul 1) avem triunghiurile $A_b B_b C_b$, $D_a E_a F_a$, $E_a F_a G_a$

În cazul 2) avem triunghiurile $C_a E_a G_a$, $E_a F_a G_a$, $C_a F_a G_a$

În cazul 3) avem triunghiurile $A_b B_b E_b$, $C_a D_a G_a$, $C_a F_a G_a$

În cazul 4) avem triunghiurile $A_b C_b E_b$, $B_a D_a F_a$, $B_a D_a G_a$

Barem de corectare

Problema 8.1

Reprezintă în forma: $\left[\frac{\left((10^{11})^3 + 7^3 \right) - 7^3}{10^{11} + 7} \right]$ 2 puncte

$\left[\frac{(10^{11} + 7) \left((10^{11})^2 - 10^{11} \cdot 7 + 7^2 \right) - 7^3}{10^{11} + 7} \right]$ 1 punct

$\left[10^{22} - 7 \cdot 10^{11} + 7^2 - \frac{7^3}{10^{11} + 7} \right]$ 1 punct

$10^{22} - 7 \cdot 10^{11} + 48$ 2 puncte

Răspuns corect 0; 4; 8 1 punct

Total: 7 puncte

Problema 8.2

Consideră în planul xOy punctele

$A(1; 4) A_1(1; 0) M(x; 0) B(7; -4) B_1(7; 0) C(1; -4)$ 3 puncte

Aplică teorema lui Pitagora și calculează

$AM = \sqrt{x^2 - 2x + 17}$ 3 puncte

$BM = \sqrt{x^2 - 14x + 65}$

$AB = 10$

Aplică $AM + BM \geq AB$ 1 punct

Total: 7 puncte

Problema 8.3

Introduce variabila $x = BC$ 1 punct

$P_{\triangle ADE} = 8 - 2x$ 2 puncte

$\frac{DE}{x} = \frac{8 - 2x}{8}$ 1 punct

$DE = 1 - \frac{1}{4}(x - 2)^2$ 2 puncte

$DE_{\max} = 1$ 1 punct

Total: 7 puncte

Problema 8.4

Identifică variantele

I) 6:1 ; II) 5:2 ; III) 4:3 1 punct

Examinează corect varianta I 1 punct

Examinează corect varianta II 2 puncte

Examinează corect varianta III 3 puncte

Total: 7 puncte