A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 2-5 martie, 2018
Clasa a VIII-*a,* ziua a doua

SOLUŢIILE PROBLEMELOR

Problema 8.5. Determinați toate valorile întregi a pentru care ecuația $x^2 + ax + a = 0$ are soluții întregi.

Soluție. Fie x_1, x_2 - soluțiile ecuației din enunț. Atunci $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = a$ (relațiile lui Viete) **(1)**. Analizăm expresia $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$:

$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 + 1 = -a + a + 1 = 1$. **(1)**

$x_1, x_2 \in \mathbf{Z} \Rightarrow x_1 + 1, x_2 + 1 \in \mathbf{Z}$ și cum $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = 1 \\ x_2 + 1 = 1 \end{cases}$ **(1)** sau $\begin{cases} x_1 + 1 = -1 \\ x_2 + 1 = -1 \end{cases}$ **(1)**

În primul caz obținem $x_1 = x_2 = 0$ și $a = 0$ **(1)**, iar în celălalt $x_1 = x_2 = -2$, $a = 4$ **(1)**. Valorile obținute pentru a sunt soluții ale inecuației $a^2 - 4a \geq 0$.

Răspuns: $a \in \{0, 4\}$. **(1)**

Problema 8.6. Fie $a > 0$ și $b, c \in [1,2)$ astfel încât $\dfrac{a+b}{b(1+c)} + \dfrac{a+c}{c(1+b)} = 2$. Demonstrați cã a, b, c pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Soluție. Pentru $a > 0$ și $b, c \in [1,2)$ avem:

$$\frac{a+b}{b(1+c)} + \frac{a+c}{c(1+b)} = 2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b(1+c)} - 1 + \frac{a+c}{c(1+b)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a - bc)\left(\frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+b)}\right) = 0 \quad \textbf{(2)} \quad \Leftrightarrow \quad a - bc = 0 \Leftrightarrow a = bc. \quad \textbf{(1)}$$

1) $a < b + c$, $a = bc$, $a > 0$ și $b, c \in [1,2) \Leftrightarrow bc < b + c$, $b, c \in [1,2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} > 1$, adevãrat, deoarece $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} > 1$. **(2)**

2) $b < c + a$, $a = bc$, $a > 0$ și $b, c \in [1,2) \Leftrightarrow b < c + bc$, $b, c \in [1,2) \Leftrightarrow b < c(1+b)$, adevărat. **(1)**

3) $c < a + b$, $a = bc$, $a > 0$ și $b, c \in [1,2) \Leftrightarrow c < bc + b$, $b, c \in [1,2) \Leftrightarrow c < b(c+1)$, adevărat. **(1)**

Problema 8.7. Fie $x, y, z > 0$, astfel încât $xyz = 1$. Arãtați cã: $\sqrt{\dfrac{xy}{1+y}} + \sqrt{\dfrac{yz}{1+z}} + \sqrt{\dfrac{zx}{1+x}} > 2$.

Soluție. În condițiile din enunț, expresia $\sqrt{\dfrac{xy}{1+y}}$ poate fi scrisă : $\sqrt{\dfrac{xy}{1+y}} = \sqrt{\dfrac{x}{1+\frac{1}{y}}}$.

În continuare: $\sqrt{\dfrac{xy}{1+y}} + \sqrt{\dfrac{yz}{1+z}} + \sqrt{\dfrac{zx}{1+x}} = \sqrt{\dfrac{x}{1+\frac{1}{y}}} + \sqrt{\dfrac{y}{1+\frac{1}{z}}} + \sqrt{\dfrac{z}{1+\frac{1}{x}}}$. **(1)**

Notăm $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{b}{c}$, $z = \dfrac{c}{a}$, $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ $\Rightarrow xyz = \dfrac{abc}{bca} = 1$. **(1)**

Inegalitatea devine $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} > 2$. **(1)**

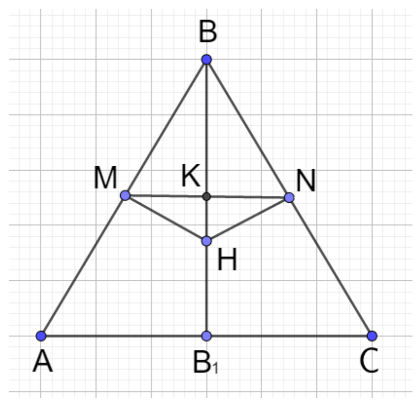
Dar $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} > \frac{2a}{a+b+c}$ (s-a aplicat inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică pentru două numere pozitive diferite: $\sqrt{a(b+c)} < \frac{a+b+c}{2}$) **(1)**. Analog $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{2b}{a+b+c}$, $\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{2c}{a+b+c}$. **(1)** Adunăm membru cu membru ultimile trei inegalități și obținem:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} > 2. \qquad \textbf{(1)}$$

Eegalitate nu poate fi. În caz contrar obținem $a = b + c$, $b = c + a$ și $c = a + b$ sau prin adunare membru cu membru $a + b + c = 0$ – fals. **(1)**

Problema 8.8. Punctul de intersecție al înălțimilor unui triunghi ascuțitunghic este egal depărtat de mijloacele laturilor lui. Demonstrați, că triunghiul este echilateral.

Soluție. 1) Fie H punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC (ortocentrul), $[BB_1]$ – înălțime a triunghiului, iar M și N mijloacele laturilor $[AB]$, corespunzător $[BC]$ (vezi desenul alăturat). **(1)**



2) Fie $BB_1 \cap MN = \{K\}$.

3) $[MN]$ – linie mijlocie a triunghiului ABC $\Rightarrow$ $MN \parallel AC$ **(1)**

4) $[BB_1]$ – înălțime a triunghiului $\Rightarrow$ $BB_1 \perp AC$.

5) Din **(3)** și **(4)** $\Rightarrow$ $BH \perp MN$ $\Rightarrow$ $[HK]$ - înălțime a triunghiului MHN . **(1)**

6) Triunghiul MHN este isoscel și $[HK]$ - înălțime $\Rightarrow$ $[HK]$ – bisectoare. **(1)**

7) $\Delta BHM \equiv \Delta BHN$ (LUL) **(1)** $\Rightarrow$ $BM = BN$ $\Rightarrow$ $BA = BC$. **(1)**

8) Analog arătăm că $BC = CA$. Deci triunghiul ABC este echilateral. **(1)**