

A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 2 – 5 martie, 2018

CLASA IX-a, prima zi

SOLUȚII

Problema 9.1. Fie A mulțimea tuturor produselor de trei numere naturale impare consecutive, iar B mulțimea tuturor produselor de două numere naturale impare consecutive. Să se determine, dacă A conține vre-un număr, care ar fi cu 2018 mai mare decât un careva număr din B .

Rezolvare. Din trei numere impare consecutive unul se divide cu 3, prin urmare, oricare număr $a \in A$ are forma $3m$, pentru un careva număr întreg m . Oricare număr $b \in B$ are forma $(2n-1)(2n+1)$. Conform condiției, $a = b + 2018$, adică $3m = (2n-1)(2n+1) + 2018 = 4n^2 + 2017$, de unde

$$(2n)^2 = 3m - 2017 = 3(m - 672) - 1.$$

Pătratul oricărui număr este congruent cu 0 sau 1 modulo 3, deci $(2n)^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$. În același timp, partea dreaptă a egalității este congruentă cu -1 modulo 3 – contradicție.

Astfel, numere cu proprietatea din enunț nu există.

Problema 9.2. Numerele de forma $\frac{k(k+1)}{2}$, unde $k \in \mathbb{N}$, se numesc triunghiulare. Să se stabilească, dacă 2018 este suma a două numere triunghiulare.

Rezolvare. Fie $\frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = 2018$, cu $m, n \in \mathbb{N}$. De aici se obține consecutiv:

$$m^2 + m + n^2 + n = 4036; (4m^2 + 4m + 1) + (4n^2 + 4n + 1) = 4 \cdot 4036 + 2;$$

$$(2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 16146. \quad (1)$$

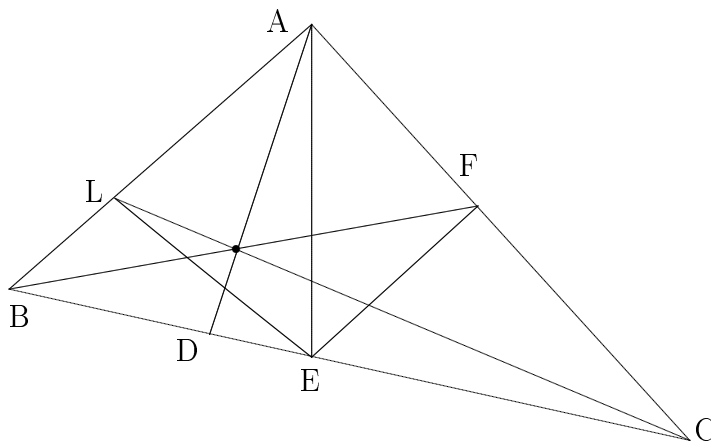
Partea dreaptă a egalității se divide cu 9, deci și cea stângă se divide cu 9. Cum $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $x^2 \equiv 0, 1, 4, 7 \pmod{9}$ și, la fel, $y^2 \equiv 0, 1, 4, 7 \pmod{9}$, congruența $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{9}$ are loc doar pentru $x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \pmod{9}$. Din (1) urmează $(2m+1)^2 \equiv (2n+1)^2 \equiv 0 \pmod{9}$, adică $2m+1 = 3a$, $2n+1 = 3b$, pentru careva $a, b \in \mathbb{N}$. Observăm însă, că dacă x^2 se divide cu 3, $x \in \mathbb{N}$, atunci x^2 se divide cu 9. Prin urmare, conform (1), $9a^2 + 9b^2 = 16146$, sau

$$a^2 + b^2 = 1794. \quad (2)$$

Cum a^2 poate fi congruent doar cu 0 sau 1 modulo 3 și b^2 la fel, congruența $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{3}$ are loc numai dacă $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Prin urmare, $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod{9}$ – contradicție cu (2), deoarece $1794 \equiv 3 \pmod{9}$.

Astfel, 2018 nu este o sumă de două numere triunghiulare.

Problema 9.3. În triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ construim $AD \perp BC$, ($D \in (BC)$) și bisectoarea AE , ($E \in (BC)$). Notăm cu L și F proiecțiile ortogonale ale punctului E pe catetele $[AB]$ și $[AC]$. Să se demonstreze, că dreptele AD , BF și CL sunt concurente.



Rezolvare. Notăm $AB = c$, $BC = a$ și $AC = b$. Conform teoremei bisectoarei, avem $\frac{c}{b} = \frac{BE}{EC}$. (1)
 $EL \parallel AC \Rightarrow \frac{AL}{LB} = \frac{CE}{EB}$. (2) Din (1) și (2) rezultă $\frac{AL}{LB} = \frac{b}{c}$. (3) $EF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$. (4)
Din (1) și (4) rezultă $\frac{CF}{FA} = \frac{b}{c}$. (5). Conform teoremei catetei, obținem $BD \cdot a = c^2$ și $b^2 = CD \cdot a$,
deci $\frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{b^2}$. (6)

Din (3), (5) și (6) rezultă $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$. Conform teoremei lui Ceva, dreptele AD , BF și CL sunt concurente.

Problema 9.4. Fie $a > 0$ și $x, y \in \mathbb{R}$ astfel, încât $|x| < \frac{1}{a}$ și $|y| < \frac{1}{a}$. Să se arate, că $\left| \frac{x+y}{1+a^2xy} \right| < \frac{1}{a}$.

Rezolvare. Se stabilește consecutiv:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} |x| < \frac{1}{a}, \\ |y| < \frac{1}{a}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}, \\ -\frac{1}{a} < y < \frac{1}{a}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax+1 > 0, \\ ay+1 > 0, \\ ax-1 < 0, \\ ay-1 < 0. \end{array} \right. \\
2) \quad & \left\{ \begin{array}{l} |x| < \frac{1}{a}, \\ |y| < \frac{1}{a}; \end{array} \right. \Rightarrow |x| \cdot |y| < \frac{1}{a^2} \Rightarrow |xy| < \frac{1}{a^2} \Rightarrow -\frac{1}{a^2} < xy < \frac{1}{a^2} \Rightarrow a^2xy + 1 > 0. \\
3) \quad & \left\{ \begin{array}{l} (ax+1)(ay+1) > 0, \\ (ax-1)(ay-1) > 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2xy + ax + ay + 1 > 0, \\ a^2xy - ax - ay + 1 > 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a(x+y) > -(1+a^2xy), \\ -a(x+y) > -(1+a^2xy). \end{array} \right. \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{1+a^2xy} > -\frac{1}{a}, \\ \frac{x+y}{1+a^2xy} < \frac{1}{a}; \end{array} \right. \Rightarrow \left| \frac{x+y}{1+a^2xy} \right| < \frac{1}{a}. \quad \text{Astfel, afirmația este demonstrată.}
\end{aligned}$$

A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2 – 5 martie, 2018

CLASA IX-a, ziua a doua

SOLUȚII

Problema 9.5. M este o mulțime de 2018 numere naturale, nici unul dintre care nu se divide cu 2018. Să se arate, că există o submulțime a lui M , care are suma elementelor divizibilă cu 2018.

Rezolvare. Fie $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{2018}\}$. Se formează sumele

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2018}. \quad (*)$$

Dacă printre cele 2018 numere din $(*)$ este unul divizibil cu 2018, termenii sumei respective formează mulțimea necesară.

În caz contrar, se examinează resturile împărțirii acestor numere la 2018; asemenea resturi pot fi cel mult 2017. Prin urmare, cel puțin două dintre ele vor fi egale. Fie că aceste resturi sunt obținute prin împărțirea la 2018 a numerelor

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m \quad \text{și} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \text{unde } m < n.$$

În acest caz diferența lor, $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$ se divide cu 2018. Submulțimea necesară este $\{a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n\}$. Afirmatia este demonstrată.

Remarcă. Afirmatia este adevărată pentru oricare număr de elemente ale mulțimii M .

Problema 9.6. Să se arate, că pentru oricare număr natural n există numerele naturale x și y astfel, încât $2(n - xy) = x(x + 1) + y(y + 3)$.

Rezolvare. Din egalitate se obține

$$2n = x^2 + 2xy + y^2 + x + 3y = (x + y)^2 + (x + y) + 2y = (x + y)(x + y + 1) + 2y,$$

de unde $n = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + y$. Fie $x + y = z$; atunci $n = \frac{z(z + 1)}{2} + y$. Frația este un număr triunghiular; $\frac{z(z + 1)}{2} = T_z$. Se obține $n = T_z + y$.

Oricare număr natural n se află între două numere triunghiulare consecutive:

$$T_z \leq n < T_{z+1}. \quad (*)$$

Acum pot fi aflate numerele x și y .

1) Din $(*)$ se află numărul z , care este unic.

2) Din $n = T_z + y$ se află $y = n - T_z$, de asemenea unic.

3) Din $x + y = z$ se află, cu unicitate, $x = z - y$.

Astfel, pentru oricare număr natural n există numerele naturale x și y , care satisfac condiția din enunț.

În calitate de exemplu, fie $n = 314$. Se stabilește inegalitatea dublă $T_{24} = 300 < n < T_{25} = 325$. S-a aflat $z = 24$. Se află apoi $y = n - T_z = 314 - 300 = 14$. Rezultă $x = z - y = 24 - 14 = 10$. Pentru $n = 314$ există numerele naturale $x = 10$, $y = 14$, care satisfac, după cum se poate ușor verifica, egalitatea din enunț.

Pentru $n = 2018$ se obține $T_{63} = 2016 < n < T_{64} = 2080$; $z = 63$, $y = 2$, $x = 61$.

Soluție alternativă. Ecuația din enunț se scrie sub forma

$$(x + y)^2 + x + 3y = 2n. \quad (1)$$

Se va arăta, prin inducție, că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ există perechea (x_n, y_n) , care satisface ecuația (1).

Pentru $n = 0$ se află $x_0 = y_0 = 0$. Pentru $n = 1, 2, 3$ se află, respectiv, $(x, y) = (1, 0), (0, 1), (2, 0)$.

Fie că pentru $n = k$ există x_k și y_k , care satisfac ecuația (1), adică

$$(x_k + y_k)^2 + x_k + 3y_k = 2k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pentru x_k există două posibilități: $x_k = 0$ și $x_k \neq 0$. În fiecare caz se determină x_{k+1} și y_{k+1} .

1) Pentru $x_k = 0$ se obține

$$y_k^2 + 3y_k = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1a)$$

Se definesc: $x_{k+1} = y_k + 1$, $y_{k+1} = 0$. Se substituie aceste valori în (1):

$$(x_{k+1} + y_{k+1})^2 + x_{k+1} + 3y_{k+1} = (y_k + 1)^2 + y_k + 1 + 3 \cdot 0 = (y_k^2 + 3y_k) + 2 = 2k + 2 = 2(k + 1).$$

Ecuția (1) este satisfăcută.

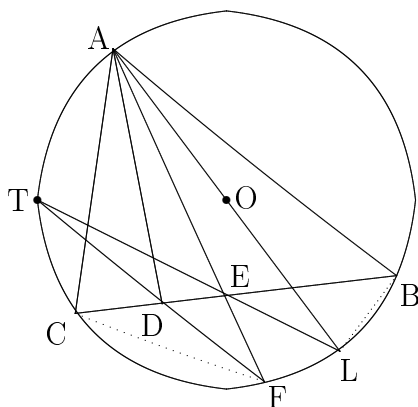
2) Pentru $x_k \neq 0$ se definesc $x_{k+1} = x_k - 1$, $y_{k+1} = y_k + 1$. Aceste valori se substituie în (1):

$$(x_k - 1 + y_k + 1)^2 + (x_k - 1) + 3(y_k + 1) = [(x_k + y_k)^2 + x_k + 3y_k] + 2 = 2k + 2 = 2(k + 1).$$

Și în acest caz ecuația (1) este satisfăcută.

Astfel, afirmația din enunț este demonstrată.

Problema 9.7. Se dă triunghiul ascuțitunghic ABC , înscris în cercul de centru O . Construim înălțimea AD , ($D \in BC$), și bisectoarea AE , ($E \in BC$), care intersectează cercul în punctul F . Notăm cu L intersecția dreptei AO cu cercul. Să se demonstreze, că dreptele FD și LE se intersectează pe cercul, circumscris triunghiului ABC .



Rezolvare. Unghiul ABL se sprijină pe diametrul $AL \Rightarrow m(\angle ABL) = 90^\circ$. În $\triangle CAD$ avem $m(\angle CAD) = 90^\circ - m(\angle ACB)$. (1)

În $\triangle ALB$, $m(\angle BAO) = 90^\circ - m(\angle ALB)$. Dar $m(\angle ALB) = m(\angle ACB)$ (se sprijină pe același arc). Deci $m(\angle BAO) = 90^\circ - m(\angle ACB)$. (2)

Din (1) și (2) rezultă $\angle CAD \equiv \angle BAO$.

AE – bisectoare, deci $\angle CAE \equiv \angle BAE$ și cum $\angle CAD \equiv \angle BAO$, rezultă $\angle DAE \equiv \angle EAL$. (3)

$\triangle CAD \sim \triangle LAB$ (caz UU) $\Rightarrow \frac{AC}{AL} = \frac{AD}{AB}$, adică $AC \cdot AB = AD \cdot AL$. (4)

Cum $\angle CFA \equiv \angle CBA$ și $\angle FAC \equiv \angle FAB \Rightarrow \triangle CFA \sim \triangle EBA \Rightarrow \frac{CA}{AE} = \frac{AF}{AB}$. Prin urmare, $AC \cdot AB = AE \cdot AF$. (5)

Din (4) și (5) rezultă $AD \cdot AL = AE \cdot AF \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AL}$. (6)

Din (3) și (6) $\Rightarrow \triangle DAF \sim \triangle EAL$ (LUL). Prin urmare, $\angle DFA \equiv \angle ELA$. Aceste unghiuri sunt înscrise în același cerc, deci se sprijină pe același arc AT între laturi.

Astfel, FD și LE se intersectează pe cercul de centru O .

Problema 9.8. Să se arate, că dacă numerele reale $a, b, c \in [0, 1]$, atunci

$$\frac{3a^2 - 2a}{1 + b^3 + c^3} + \frac{3b^2 - 2b}{1 + a^3 + c^3} + \frac{3c^2 - 2c}{1 + a^3 + b^3} \leq 1.$$

Rezolvare. Pentru $a = b = c = 0$ inegalitatea este adevărată: $0 \leq 1$. În continuare, vom presupune că măcar unul dintre aceste numere este nenul.

Dacă $x \in [0, 1]$, atunci este adevărată inegalitatea

$$x^3 \geq 3x^2 - 2x. \quad (*)$$

Într-adevăr,

$$(*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(2 - x) \geq 0.$$

Cum $x \in [0, 1]$, toți 3 factori din ultima inegalitate sunt nenegativi, deci inegalitatea, iar împreună cu ea și (*), este adevărată. Folosind (*) pentru $x = a, b, c$ și scăzând din numitorii fracțiilor numerele

nenegative $1 - a^3$, respectiv $1 - b^3$, $1 - c^3$, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{3a^2 - 2a}{1 + b^3 + c^3} + \frac{3b^2 - 2b}{1 + a^3 + c^3} + \frac{3c^2 - 2c}{1 + a^3 + b^3} &\leq \frac{a^3}{1 + b^3 + c^3} + \frac{b^3}{1 + a^3 + c^3} + \frac{c^3}{1 + a^3 + b^3} \leq \\ &\leq \frac{a^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{b^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{c^3}{a^3 + b^3 + c^3} = 1. \end{aligned}$$

Astfel, afirmația din enunț este demonstrată.