AGENŢIA NAŢIONALĂ PENTRU CURRICULUM ŞI EVALUARE
A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2 – 5 martie, 2018

CLASA IX-a, prima zi

9.1. *Fie A mulţimea tuturor produselor de trei numere naturale impare consecutive, iar B mulţimea tuturor produselor de două numere naturale impare consecutive. Să se determine, dacă A conţine vre-un număr, care ar fi cu 2018 mai mare decât un careva număr din B. Să se argumenteze răspunsul.*

9.2. *Numerele de forma $\dfrac{k(k+1)}{2}$, unde $k \in \mathbb{N}$, se numesc triunghiulare (sau numere Gauss). Să se stabilească, dacă 2018 este suma a două numere triunghiulare.*

9.3. *În triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^0$ construim $AD \perp BC$ $(D \in (BC))$ şi bisectoarea AE, $(E \in (BC))$. Notăm cu L şi F proiecţiile ortogonale ale punctului E pe catetele $[AB]$ şi, respectiv $[AC]$. Să se demonstreze, că dreptele AD, BF şi CL sunt concurente.*

9.4. *Fie $a > 0$ şi x, $y \in \mathbb{R}$ astfel, încât $|x| < \dfrac{1}{a}$ şi $|y| < \dfrac{1}{a}$. Să se arate, că $\left|\dfrac{x+y}{1+a^2xy}\right| < \dfrac{1}{a}$.*

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte MULT SUCCES!

62-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 2 – 5 марта 2018

IX класс, первый день

9.1. Пусть A множество всех произведений трех последовательных натуральных нечетных чисел, а B множество всех произведений двух последовательных натуральных нечетных чисел. Определить, если A содержит число, которое на 2018 больше некоторого числа из В. Обосновать ответ.

9.2. Числа вида $\dfrac{k(k+1)}{2}$, где $k \in \mathbb{N}$, называются треугольными (или числами Гаусса). Определить, если число 2018 есть сумма двух треугольных чисел.

9.3. *В треугольнике ABC с $m(\angle A) = 90^0$ строим $AD \perp BC$ $(D \in (BC))$ и биссектрису AE, $(E \in (BC))$. Обозначим через L и F ортогональные проекции точки E на катеты $[AB]$ и $[AC]$ соответственно. Доказать, что прямые AD, BF и CL пересекаются в одной точке.*

9.4. Пусть $a > 0$ и x, $y \in \mathbb{R}$ такие, что $|x| < \dfrac{1}{a}$ и $|y| < \dfrac{1}{a}$. Показать, что $\left|\dfrac{x+y}{1+a^2xy}\right| < \dfrac{1}{a}$.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

AGENŢIA NAŢIONALă PENTRU CURRICULUM ŞI EVALUARE
A 62-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 2 – 5 martie, 2018
CLASA IX-a, ziua a doua

9.5. *M este o mulţime de 2018 numere naturale distincte, nici unul dintre care nu se divide cu 2018. Să se arate, că există o submulţime a lui M, care are suma elementelor divizibilă cu 2018.*

9.6. *Să se arate, că pentru oricare număr natural n există numerele naturale x şi y astfel, încât*

$$2(n - xy) = x(x + 1) + y(y + 3).$$

9.7. *Se dă triunghiul ascuţitunghic ABC, înscris în cercul de centru O. Construim înălţimea AD, $(D \in BC)$, şi bisectoarea AE, $(E \in BC)$, care intersectează cercul în punctul F. Notăm cu L intersecţia dreptei AO cu cercul. Să se demonstreze, că dreptele FD şi LE se intersectează pe cercul, circumscris triunghiului ABC.*

9.8. *Să se arate, că dacă numerele reale $a, b, c \in [0,\ 1]$, atunci*

$$\frac{3a^2 - 2a}{1 + b^3 + c^3} + \frac{3b^2 - 2b}{1 + a^3 + c^3} + \frac{3c^2 - 2c}{1 + a^3 + b^3} \leqslant 1.$$

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte — Mult succes!

62-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА
Кишинэу, 2 – 5 марта 2018
IX класс, второй день

9.5. Множество M состоит из 2018 натуральных различных чисел, ни одно из которых не делится на 2018. Показать, что M содержит подмножество, сумма элементов которого делится на 2018.

9.6. Показать, что для любого натурального числа n существуют натуральные числа x и y такие, что

$$2(n - xy) = x(x + 1) + y(y + 3).$$

9.7. *Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Строим высоту AD, $(D \in BC)$, и биссектрису AE, $(E \in BC)$, которая пересекает окружность в точке F. Обозначим через L пересечение прямой AO с окружностью. Доказать, что прямые FD и LE пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.*

9.8. Показать, что если действительные числа $a, b, c \in [0,\ 1]$, тогда

$$\frac{3a^2 - 2a}{1 + b^3 + c^3} + \frac{3b^2 - 2b}{1 + a^3 + c^3} + \frac{3c^2 - 2c}{1 + a^3 + b^3} \leqslant 1.$$

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов — Желаем успехов!