**Problema 1** (10,0 p.)

**Soluţie**

1. Steaua şi planeta se rotesc în jurul centrului maselor comun al sistemei Stea-Planetă în caz general pe traiectorii eliptice. Viteza radială trebuie să fie orientată de-a lungul semiaxei mici a elipsei (elipsa - traiectoria Stelei). Steaua de parcă ar oscila pentru observatorul de pe Pământ, având amplitudinea maximă, timpul de tranzit maxim și deplasarea Doppler maximă. (2,0 p.)

2. Reieșind din compararea spectrelor de emisie ale Stelei până și în timpul trecerii exoplanetei pe discul stelei s-a stabilit că absorbția radiației Stelei de atmosfera exoplanetei va fi înregistrată pe spectrogramă sub forma unor linii, sau a benzilor moleculare după care se pot trage concluzii despre compoziția atmosferei exoplanetei. (1,0 p.)

3. Un an pe o exoplanetă durează $T = 2\tau = 2\cdot 10^6\ s$.

Viteza stelei în pericentru este $V_p = 0{,}7\cdot 10^{-7}$ c = 21 *m/s* (0,3 p.)
și în apocentru $V_a$ = 15 *m/s*. (0,3 p.)
Orbita exoplanetei este o elipsă cu semiaxa mare

$$a = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{2/3}\left(G\left(M + M_p\right)\right)^{1/3}. \text{ (0,6 p.)}$$

Semiaxa mare a elipsei traiectoriei Stelei, reieșind din legea lui Kepler, cu considerarea mișcării Stelei în jurul centrului maselor este $a\left(M + M_p\right)^{-1} M_p$. (0,4 p.)

Această mărime determină amplitudinea deplasării Stelei pe bolta cerească pentru observatorul de pe Pământ.

Astfel pentru determinarea masei obținem următoarele ecuații

$$V_a = \frac{2\pi a}{T}\frac{M_p}{M + M_p}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{1/2} \text{ (0,9 p.)}$$

$$V_p = V_a\frac{1+e}{1-e} \text{ (0,5 p.)}$$

$$e = \frac{1}{6} \text{ (0,2 p.)}$$

$$V_p = \left(\frac{2\pi GM}{T}\right)^{1/3}\frac{M_p}{M}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\left(\frac{M + M_p}{M}\right)^{-2/3} \text{ (0,5 p.)}$$

Substituind valorile numerice obținem: $M_p / M = 3\cdot 10^{-4}$, $M_p = 3\cdot 10^{26} kg$. (0,3 p.)

4. Deplasarea unghiulară a Stelei pe bolta cerească pentru observatorul aflat pe Pământ depinde de mărimea dublă a semiaxei mari a elipsei ce determină traiectoria Stelei și e egală cu

$$\delta\varphi = 2\frac{a}{L}\frac{M_p}{M+M_p} = 2{,}44\cdot 10^{-11} rad = 0{,}005\Delta\varphi \text{, (0,9 p.)}$$

ce constituie cca $10^{-6}$ secundă ungiulară. Rezoluția telescopului este insuficientă pentru observația directă a deplasării Stelei pe bolta cerească subacțiunea exoplanetei. (0,1 p.)

5. Puterea radiației emise este proporțională suprafeței radiante. Deci $\frac{S_p}{S} = 0{,}01,\quad R_p = 0{,}1R,\quad R_p = 3\cdot 10^7 m,\quad$ (1,0 б.) $\rho_p = 2{,}64 g/cm^3,\quad$ (0,5 p.) $\quad g_p = 22{,}4 ms^{-2}\quad$ (0,5 p.)

**Problema 2** (10,0 p.)

**Soluţie**

1. Procesul de încărcare a condensatorului este descris de expresia

$$\frac{q}{C} + \dot{q}R_1 = E_1 \text{ (0,3 p.)}$$

$$U_C(t) = E_1\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \text{ (0,3 p.)}$$

$$\tau = R_1C,\ U_C(t_0) = E_1/2,\ t_0 = \tau\ln 2 \text{ (0,4 p.)}$$

2. Momentul de timp inițial se va considera cel ce corespunde cu trecerea în conducție a întrerupătorului $K_2$. Folosind regulile lui Kirchhoff se alcătuiesc ecuațiile:

$$E_1 = \frac{q}{C} + I_2R_1 \text{ (0,6 p.)}$$

$$E_2 = I_1R_2 - I_2(R_1 + R_2) + L\left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right) \text{ (0,6 p.)}$$

$$I_1 = \dot{q} \text{ (0,1 p.)}$$

$$I_2 = \frac{E_1}{R_1} - \frac{q}{\tau} \text{ (0,1 p.)}$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{q}}{\tau} \text{ (0,1 p.)}$$

$$E_2 = \dot{q}R_2 - \left(E_1 - \frac{q}{C}\right)\frac{R_1 + R_2}{R_1} + L\left(\ddot{q} + \frac{\dot{q}}{\tau}\right) \text{ (0,2 p.)}$$

Astfel, problema se reduce la determinarea sarcinii condensatorului $q$. Ecuația pentru $q$ se aduce la următoarea formă:

$\ddot{q}+\dot{q}a+qb=d$ (0,2 p.)

$a=\frac{1}{\tau}+\frac{R_2}{L}$ (0,2 p.)

$b=\omega_0^2\frac{R_1+R_2}{R_1}$ (0,2 p.)

$\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ (0,2 p.)

$d=\left(E_2+E_1\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\frac{1}{L}$ (0,2 p.)

În regim permanent sarcina electrică în condensator nu depinde de timp. Ca urmare

$\ddot{q}=\dot{q}=0$ (0,2 p.)

$q=\frac{d}{b}=\left(E_2+E_1\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\frac{R_1}{L\omega_0^2(R_1+R_2)}=\left(E_2\frac{R_1}{R_1+R_2}+E_1\right)C$ (0,3 p.)

Reieșind din condițiile problemei, dependența de timp a sarcinii electrice în condensator se prezintă sub forma:

$q(t)=\frac{d}{b}+q_m e^{-\beta t}\cos\omega t$ (0,6 p.)

Calculând derivatele respective

$\dot{q}=-q_m e^{-\beta t}(\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)$ (0,4 p.)

$\ddot{q}=\beta q_m e^{-\beta t}(\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)+q_m e^{-\beta t}(\beta\omega\sin\omega t-\omega^2\cos\omega t)$ (0,4 p.)

și înlocuindu-le în ecuația inițială, vom obține

$(2\beta-a)\omega\sin\omega t+(\beta^2-\omega^2-\beta a+b)\cos\omega t=0$ (0,6 p.)

Suma a doi termeni ce depind de timp este zero pentru orice moment de timp numai dacă factorii de pe lângă sinus sau cosinus este zero.

$\beta=\frac{a}{2}$ (0,2 p.)

$\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{R_2}{L}\right)$ (0,2 p.)

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{R_2}{L}\right)^2$$ (0,5 p.)

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{R_2}{L}\right)^2$$ (0,2 p.)

$$q_m = E_1 \frac{C}{2} - \frac{d}{b}$$ (0,4 p.)

$$q_m = -\left(E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_1}{2}\right) C$$ (0,3 p.)

3. Tensiunea pe bobina de inductanță se determină nemijlocit din regulile lui Kirchhoff pentru momentul inițial de timp după trecerea în stare de conducție a întrerupătorului al doilea.

$t = 0, \quad I_1 = I_2$ (0,2 p.)

$$E_2 = U_L - I_1 R_1 = U_L - \left(E_1 - U_C(0)\right)$$ (0,3 p.)

$$U_L = E_1 + E_2 - E_1/2 = E_2 + E_1/2$$ (0,5 p.)

4. În regim permanent $U_C = E_2 \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} + E_1$ (1,0 p.)

Proba teoretică ORF 2019, clasa a 12

**Problema 3** (10,0 p.)

**Soluţie**

**A.**

1A. În sistemul de coordonate polare

$x = r\cos\varphi - ae$ (0,6 p.)

$y = r\sin\varphi$ (0,2 p.)

$x^2b^2 + y^2a^2 = b^2a^2 = a^4(1-e^2)$ (0,2 p.)

Aici e – excentricitatea. Substituind coordonatele *x, y* aducem această ecuație la următoarea formă
$\left(r(1-e\cos\varphi) - a(1-e^2)\right)\left(r(1+e\cos\varphi) + a(1-e^2)\right) = 0, \quad r = a(1-e^2)(1-e\cos\varphi)^{-1}, \quad e<1$ (1,0 p.)

2A. Diferențiind momentul impulsului se obține legea de conservare a vitezei areolară, $\dot{\vec{L}} = [\dot{\vec{r}} \times \vec{p}] + [\vec{r} \times \dot{\vec{p}}] = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0, \Rightarrow \dot{S} = 0{,}5 \cdot [\dot{\vec{r}} \times \vec{r}]_z = const$ (0,6 p.)

Se observă că raza-vector mătură aria
$\dot{S} = r^2\dot{\varphi}/2 = const$ (0,4 p.)

$\Delta S = r^2\Delta\varphi/2$ (0,2 p.)

În apocentru *a* și pericentru *p* planeta se mișcă după un arc de circumferință. Deci
$\pi ab/T = v_a r_a/2 = v_p r_p/2$ (0,8 p.)

Aici *T* – perioada de rotație a planetei în jurul Soarelui.

3A. Să analizăm una din planete, neglijând influența altor corpuri din Univers. Observăm că considerarea mișcării soarelui se reduce la înlocuirea constantei gravitaționale *G*. Într-adevăr, reieșind din ecuațiile lui Newton pentru sistemul închis Soare-Planetă observăm, că

$M_p\ddot{\vec{r}}_p = \vec{F}(\vec{r}_p - \vec{R})$ (0,2 p.)

$M\ddot{\vec{R}} = -\vec{F}(\vec{r}_p - \vec{R})$ (0,2 p.)

$M_p\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})\left(1 + \frac{M_p}{M}\right)$ (0,5 p.)

$\Rightarrow G \to G\left(1 + \frac{M_p}{M}\right) = G'$ (0,1 p.)

Legea conservării energiei mișcării planetei față de Soare este $E/M_p = v^2/2 - G'M/r$ (0,5 p.)

în punctele $a$ și $p$ rezultă în două ecuații, din care găsim legea a III-a a lui Kepler

$$v_{a,p}^2 = \frac{2f}{r_{a,p}^2} \text{ (0,6 p.)}$$

$$f = 2\dot{S}^2 = 2\left(\frac{\pi ab}{T}\right)^2 = G'M(1-e^2)\frac{a}{2} \text{ (0,3 p.)}$$

$$E = -G'\frac{MM_p}{2a} \text{ (0,3 p.)}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G'M}{4\pi^2} = \frac{G}{4\pi^2}\left(M + M_p\right) \text{ (0,3 p.)}$$

**B.**

Din condițiile problemei $T_1 = T_2,\quad \Delta T = T_2 - T_3$.

Pentru izotermă, primul principiu al termodinamicii are forma $Q_{12} = A_{12}$. (0,2 p.)

Аналогично для изобары $Q_{23} = -C_p\Delta T = A_{23} - C_V\Delta T$ . (0,2 p.)

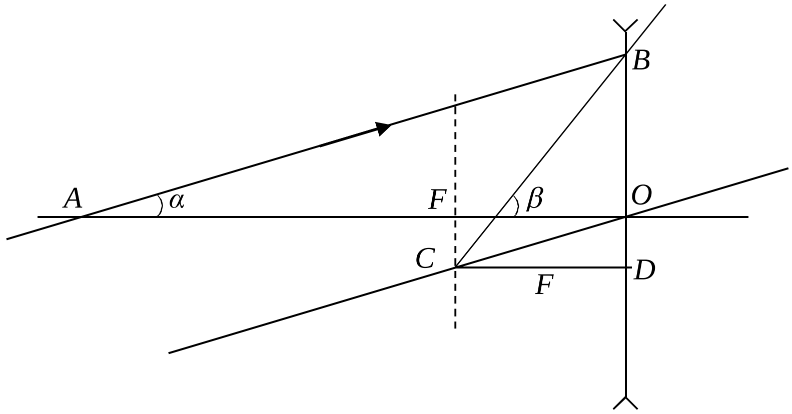
Pentru procesul adiabatic $Q_{31} = A_{31} + C_V\Delta T = 0$. (0,3 p.)

Deci, lucrul total efectuat în ciclu este $A = A_{12} + A_{23} + A_{31} = A_{12} - C_p\Delta T = A_{12} - 7R\Delta T/2$

$\eta = 1 - 7R\Delta T/2A_{12}$ (0,3 p.)

**C.**

Din triunghiurile BCD și OCD, vezi figura, obținem $tg\beta = BD/F,\quad tg\alpha = OD/F$ . (0,4 p.)



Astfel obținem:

$BD = OD + OB = OD + a tg\alpha$ (0,2 p.)

$Ftg\beta = Ftg\alpha + a tg\alpha$ (0,2 p.)

$tg\beta = \frac{a+F}{F} tg\alpha \Rightarrow \beta = 3\alpha, \quad \beta = 3^o$ (0,2 p.)

**D.**

Reieșind din relația lui Eistein pentru fotoefect obținem

$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = A + \frac{mv^2}{2} = A + eV$ (0,8 p.)

$V = \frac{1}{e}\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - A\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{1{,}24}{0{,}2} - 3{,}74\right) eV = 2{,}46 V$ (0,2 p.)