

Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA FIZICĂ, EDIȚIA LV
CHIȘINĂU, 22– 25 ,martie 2019

Теоретический тур ORF 2019,

12 класс

Задача 1

(10,0 б.)

Решение

1. Звезда и планета вращаются вокруг общего центра масс системы Звезда-Планета в общем случае по эллиптическим траекториям. Лучевая скорость должна лежать вдоль малой полуоси эллипса траектории Звезды. Звезда как-бы дрожит для земного наблюдателя с наибольшей возможной амплитудой, наибольшим временем транзита и наибольшим доплеровским смещением. (2,0 б.)

2. Из сравнения спектров излучения Звезды до и во время транзита экзопланеты перед диском Звезды, поглощение излучения Звезды атмосферой экзопланеты проявится на спектрограмме в виде линий, или молекулярных полос, по которым можно судить о составе атмосферы экзопланеты. (1,0 б.)

3. Год на экзопланете равен $T = 2\tau = 2 \cdot 10^6$ s.

Скорость Звезды в перигентре равна $V_p = 0,7 \cdot 10^{-7} c = 21$ m/s (0,3 б.)

и в апоцентре $V_a = 15$ m/s. (0,3 б.)

Орбитой экзопланеты относительно Звезды является эллипс с большой полуосью

$$a = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{2/3} \left(G(M + M_p) \right)^{1/3}. \quad (0,6 \text{ б.})$$

Большая полуось эллипса траектории Звезды согласно закону Кеплера с учетом движения Звезды вокруг центра масс равна $a(M + M_p)^{-1} M_p$. (0,4 б.)

Эта величина и определяет амплитуду смещения Звезды на небосводе для земного наблюдателя.

Таким образом для определения массы находим следующие уравнения

$$V_a = \frac{2\pi a}{T} \frac{M_p}{M + M_p} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{1/2} \quad (0,9 \text{ б.})$$

$$V_p = V_a \frac{1+e}{1-e} \quad (0,5 \text{ б.})$$

$$e = \frac{1}{6} \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$V_p = \left(\frac{2\pi GM}{T} \right)^{1/3} \frac{M_p}{M} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \left(\frac{M + M_p}{M} \right)^{-2/3} \quad (0,5 \text{ б.})$$

Подставляя численные значения, находим $M_p / M = 3 \cdot 10^{-4}$, $M_p = 3 \cdot 10^{26}$ kg. (0,3 б.)

Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA FIZICĂ, EDIȚIA LV
CHIȘINĂU, 22– 25 ,martie 2019

Теоретический тур ORF 2019,

12 класс

4. Угловое смещение Звезды на небосводе для земного наблюдателя зависит от удвоенной величины большой полуоси эллипса траектории Звезды и равно

$$\delta\varphi = 2 \frac{a}{L} \frac{M_p}{M + M_p} = 2,44 \cdot 10^{-11} \text{ rad} = 0,005 \Delta\varphi, \text{ (0,9 б.)}$$

что составляет порядка миллионной доли угловой секунды. Разрешение телескопа таким образом недостаточно для прямого наблюдения смещения Звезды на небосводе Земли под действием экзопланеты. (0,1 б.)

5. Световая мощность излучения пропорциональна площади излучающей поверхности. Следовательно

$$\frac{S_p}{S} = 0,01, \quad R_p = 0,1R, \quad R_p = 3 \cdot 10^7 \text{ m}, \quad (1,0 \text{ б.}) \quad \rho_p = 2,64 \text{ g/cm}^3, \quad (0,5 \text{ б.}) \quad g_p = 22,4 \text{ ms}^{-2} \quad (0,5 \text{ б.})$$

Задача 2

(10,0 б.)

Решение

1. Зарядка конденсатора подчиняется уравнению

$$\frac{q}{C} + \dot{q}R_1 = E_1 \text{ (0,3 б.)}$$

$$U_C(t) = E_1(1 - e^{-t/\tau}) \text{ (0,3 б.)}$$

$$\tau = R_1C, \quad U_C(t_0) = E_1/2, \quad t_0 = \tau \ln 2 \text{ (0,4 б.)}$$

2. Отсчет времени начнем с момента замыкания ключа K_2 . Используя правила Кирхгофа, составим следующие уравнения

$$E_1 = \frac{q}{C} + I_2R_1 \text{ (0,6 б.)}$$

$$E_2 = I_1R_2 - I_2(R_1 + R_2) + L(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \text{ (0,6 б.)}$$

$$I_1 = \dot{q} \text{ (0,1 б.)}$$

$$I_2 = \frac{E_1}{R_1} - \frac{q}{\tau} \text{ (0,1 б.)}$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{q}}{\tau} \text{ (0,1 б.)}$$

$$E_2 = \dot{q}R_2 - \left(E_1 - \frac{q}{C}\right) \frac{R_1 + R_2}{R_1} + L\left(\dot{q} + \frac{\dot{q}}{\tau}\right) \text{ (0,2 б.)}$$

Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA FIZICĂ, EDIȚIA LV
CHIȘINĂU, 22– 25 ,martie 2019

Теоретический тур ORF 2019,

12 класс

Таким образом задача сводится к определению заряда конденсатора q . Уравнение для q преобразуется к следующему виду

$$\ddot{q} + \dot{q}a + qb = d \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$a = \frac{1}{\tau} + \frac{R_2}{L} \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$b = \omega_0^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$d = \left(E_2 + E_1 \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \frac{1}{L} \quad (0,2 \text{ б.})$$

В установившемся режиме заряд конденсатора не зависит от времени. Следовательно

$$\ddot{q} = \dot{q} = 0 \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$q = \frac{d}{b} = \left(E_2 + E_1 \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \frac{R_1}{L\omega_0^2(R_1 + R_2)} = \left(E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + E_1 \right) C \quad (0,3 \text{ б.})$$

Заряд конденсатора в зависимости от времени представим по условию задачи в виде

$$q(t) = \frac{d}{b} + q_m e^{-\beta t} \cos \omega t \quad (0,6 \text{ б.})$$

Вычисляя производные

$$\dot{q} = -q_m e^{-\beta t} (\beta \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \quad (0,4 \text{ б.})$$

$$\ddot{q} = \beta q_m e^{-\beta t} (\beta \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + q_m e^{-\beta t} (\beta \omega \sin \omega t - \omega^2 \cos \omega t) \quad (0,4 \text{ б.})$$

и подставляя их в исходное уравнение, находим

$$(2\beta - a)\omega \sin \omega t + (\beta^2 - \omega^2 - \beta a + b)\cos \omega t = 0 \quad (0,6 \text{ б.})$$

Сумма двух слагаемых, зависящих от времени обращается в ноль в произвольный момент времени только при условии, что каждый из множителей при синусе и косинусе равен нулю.

$$\beta = \frac{a}{2} \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{R_2}{L} \right) \quad (0,2 \text{ б.})$$

Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA FIZICĂ, EDIȚIA LV
CHIȘINĂU, 22– 25 ,martie 2019

Теоретический тур ORF 2019,

12 класс

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{R_2}{L} \right)^2 \quad (0,5 \text{ б.})$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{R_2}{L} \right)^2 \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$q_m = E_1 \frac{C}{2} - \frac{d}{b} \quad (0,4 \text{ б.})$$

$$q_m = - \left(E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_1}{2} \right) C \quad (0,3 \text{ б.})$$

3. Напряжение на катушке находим непосредственно из правил Кирхгофа в начальный момент времени после замыкания второго ключа

$$t = 0, \quad I_1 = I_2 \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$E_2 = U_L - I_1 R_1 = U_L - (E_1 - U_C(0)) \quad (0,3 \text{ б.})$$

$$U_L = E_1 + E_2 - E_1 / 2 = E_2 + E_1 / 2 \quad (0,5 \text{ б.})$$

4. В установившемся режиме, $U_C = E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + E_1$ (1,0 б.)

Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA FIZICĂ, EDIȚIA LV
CHIȘINĂU, 22– 25 ,martie 2019

Теоретический тур ORF 2019,
Задача 3

12 класс
(10,0 б.)

Решение

A.

1A. В полярной системе координат

$$x = r \cos \varphi - ae \quad (0,6 \text{ б.})$$

$$y = r \sin \varphi \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = b^2 a^2 = a^4 (1 - e^2) \quad (0,2 \text{ б.})$$

Здесь e – эксцентриситет. Подставляя координаты x, y преобразуем это уравнение к следующему виду
 $(r(1 - e \cos \varphi) - a(1 - e^2))(r(1 + e \cos \varphi) + a(1 - e^2)) = 0, \quad r = a(1 - e^2)(1 - e \cos \varphi)^{-1}, \quad e < 1 \quad (1,0 \text{ б.})$

2A. Дифференцируя момент импульса получим закон сохранения секториальной скорости ,
 $\dot{L} = [\dot{\vec{r}} \times \vec{p}] + [\vec{r} \times \dot{\vec{p}}] = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0, \Rightarrow \dot{S} = 0,5 \cdot [\dot{\vec{r}} \times \vec{r}]_z = const \quad (0,6 \text{ б.})$

Легко видеть, что радиус вектор при изменении угла поворота замечает площадь

$$\dot{S} = r^2 \dot{\varphi} / 2 = const \quad (0,4 \text{ б.})$$

$$\Delta S = r^2 \Delta \varphi / 2 \quad (0,2 \text{ б.})$$

В апоцентре a и перигентре p планета движется по дуге окружности. Следовательно

$$pab / T = v_a r_a / 2 = v_p r_p / 2 \quad (0,8 \text{ б.})$$

Здесь T - период обращения планеты вокруг Солнца.

3A. Рассмотрим одну из планет, пренебрегая влиянием других тел во Вселенной. Прежде всего заметим, что учет движения Солнца сводится к замене гравитационной постоянной G . Действительно из уравнений Ньютона для замкнутой системы Солнце - Планета видим, что

$$M_p \ddot{\vec{r}}_p = \vec{F}(\vec{r}_p - \vec{R}) \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$M \ddot{\vec{R}} = -\vec{F}(\vec{r}_p - \vec{R}) \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$M_p \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \left(1 + \frac{M_p}{M} \right) \quad (0,5 \text{ б.})$$

$$\Rightarrow G \rightarrow G \left(1 + \frac{M_p}{M} \right) = G' \quad (0,1 \text{ б.})$$

Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA FIZICĂ, EDIȚIA LV
 CHIȘINĂU, 22– 25 ,martie 2019

Теоретический тур ORF 2019,

12 класс

Закон сохранения энергии движения планеты относительно Солнца $E/M_p = v^2/2 - G'M/r$ (0,5 б.)

в точках a и p приводит к двум уравнениям, из которых находим третий закон Кеплера

$$v_{a,p}^2 = \frac{2f}{r_{a,p}^2} \quad (0,6 \text{ б.})$$

$$f = 2\dot{S}^2 = 2\left(\frac{\pi ab}{T}\right)^2 = G'M(1-e^2)\frac{a}{2} \quad (0,3 \text{ б.})$$

$$E = -G'\frac{MM_p}{2a} \quad (0,3 \text{ б.})$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G'M}{4\pi^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M + M_p) \quad (0,3 \text{ б.})$$

В.

По условию задачи $T_1 = T_2$, $\Delta T = T_2 - T_3$.

Для изотермы первое начало термодинамики имеет вид $Q_{12} = A_{12}$. (0,2 б.)

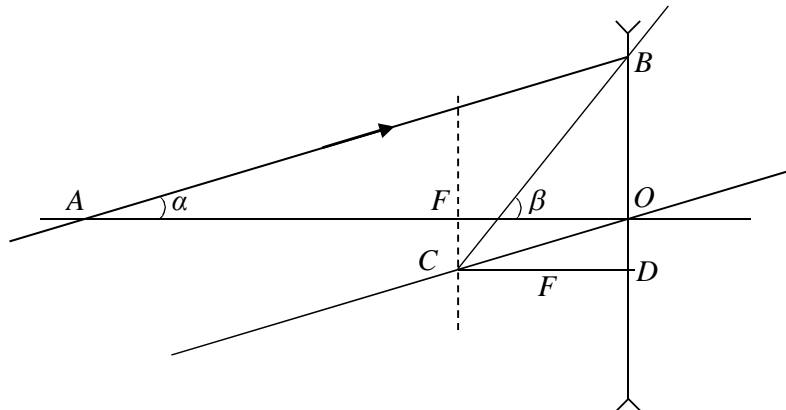
Аналогично для изобары $Q_{23} = -C_p\Delta T = A_{23} - C_V\Delta T$. (0,2 б.)

Для адиабатического процесса $Q_{31} = A_{31} + C_V\Delta T = 0$. (0,3 б.)

Следовательно работа за весь циклический процесс равна $A = A_{12} + A_{23} + A_{31} = A_{12} - C_p\Delta T = A_{12} - 7R\Delta T/2$
 $\eta = 1 - 7R\Delta T/2A_{12}$ (0,3 б.)

С.

Из треугольников BCD и OCD, смотри рисунок, имеем $\operatorname{tg}\beta = BD/F$, $\operatorname{tg}\alpha = OD/F$. (0,4 б.)



Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA FIZICĂ, EDIȚIA LV
CHIȘINĂU, 22– 25 ,martie 2019

Теоретический тур ORF 2019,

12 класс

Таким образом получим

$$BD = OD + OB = OD + atg\alpha \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$Ftg\beta = Ftg\alpha + atg\alpha \quad (0,2 \text{ б.})$$

$$tg\beta = \frac{a+F}{F}tg\alpha \Rightarrow \beta = 3\alpha, \quad \beta = 3^\circ \quad (0,2 \text{ б.})$$

D.

Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта получим

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = A + \frac{mv^2}{2} = A + eV \quad (0,8 \text{ б.})$$

$$V = \frac{1}{e} \left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - A \right) = \frac{1}{e} \left(\frac{1,24}{0,2} - 3,74 \right) eV = 2,46V \quad (0,2 \text{ б.})$$