Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 2 martie 2019, Clasa a X–a
Barem de evaluare

10.1 Determinaţi toate numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+\sqrt{n-2}}$ este raţional.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se presupune că $m=\sqrt{n+\sqrt{n-2}}\in Q$ şi se menţionează că $m\in N^*$.	1p.
2	Se obţine egalitatea $m^2=n+\sqrt{n-2}$.	1p.
3	Se menţionează că există $k\in N^*$, astfel încât $k=\sqrt{n-2}$.	1p.
4	Se obţine relaţia $m^2=k^2+k+2$.	1p.
5	Se demonstrează relaţia $m=k+1$	2p.
6	Se obţine răspunsul $n=3$.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.2 Determinaţi toate valorile parametrului real a pentru care ecuaţia $\left|ax^2-6\right|=\left|2ax\right|+\left|3a\right|$ are cel puţin o soluţie reală .

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se menţionează că pentru $a=0$ ecuaţia nu are soluţii.	1p.
2	Se obţine ecuaţia echivalentă cu ecuaţia dată: $\left\|x^2-\frac{6}{a}\right\|=2\|x\|+3$, pentru $a\in R^*$.	1p.
3	Se obţin ecuaţiile $(\|x\|-1)^2=4+\frac{6}{a}$ şi $(\|x\|+1)^2=\frac{6}{a}-2$.	2p.
4	Se obţin justificat inecuaţiile $4+\frac{6}{a}\geq 0$ şi $\frac{6}{a}-2\geq 1$.	2p.
5	Se obţine răspunsul $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup(0;+\infty)$.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.3 Fie ABC un triunghi isoscel cu $AC = BC$. Fie M mijlocul laturii AB, N – piciorul perpendicularei duse din M pe AC, iar P – mijlocul segmentului MN. Demonstraţi că dreptele BN şi CP sunt reciproc perpendiculare.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	**Etape ale rezolvării**	**Punctaj acordat**
1	Se construieşte desenul şi se trasează segmentul MQ, unde Q este mijlocul segmentului AN ($MQ \| BN$).	1p.
2	Se demonstrează că $m(\angle A) = m(\angle CMN)$.	1p.
3	Se demonstrează că $m(\angle MCP) = m(\angle AMQ)$	2p.
4	Se demonstrează că unghiurile MPK şi PMK sunt complementare.	2p.
5	Se justifică perpendicularitatea dreptelor BN şi CP.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.4 Arătaţi că partea întreagă a numărului $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n$ este un număr impar, oricare ar fi numărul natural n.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	**Etape ale rezolvării**	**Punctaj acordat**
1	Se menţionează că pentru $n = 0$ afirmaţia este adevărată.	1p.
2	Se dezvoltă binomul $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n$ şi se lansează ipoteza că $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ cu $A_n, B_n \in N^*$.	1p.
3	Se studiază complet cazul $n = 2k,\ k \in N^*$.	1p.
4	Se studiază complet cazul $n = 2k - 1,\ k \in N^*$.	1p.
5	Se consideră binomul $\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^n$ şi se ajunge la relaţia $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n + \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^n = 2A_n$.	1p.
6	Se demonstrează relaţia $\left[\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n\right] = 2A_n - 1$.	2p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*