Республиканская Олимпиада по Математике
Первый день, 2 марта 2019 года, X-й класс

Схема оценивания

10.1. Найдите все натуральные числа n, для которых число $\sqrt{n+\sqrt{n-2}}$ является рациональным.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Предполагается, что $m=\sqrt{n+\sqrt{n-2}}\in Q$ и уточняется что $m\in N^*$.	1 б.
2.	Получение равенства $m^2=n+\sqrt{n-2}$.	1 б.
3.	Уточняется, что существует $k\in N^*$ такое, что $k=\sqrt{n-2}$.	1 б.
4.	Получение соотношения $m^2=k^2+k+2$.	1 б.
5.	Доказательство соотношения $m=k+1$.	2 б.
6.	Получение ответа $n=3$.	1 б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.2. Найдите все действительные значения параметра a, для которых уравнение $|ax^2-6|=|2ax|+|3a|$ имеет хотя бы одно действительное решение.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Уточняется, что для $a=0$ уравнение не имеет решений.	1 б.
2.	Получение уравнения, эквивалентного данному уравнению: $\left\|x^2-\frac{6}{a}\right\|=2\|x\|+3$, для $a\in R^*$.	1 б.
3.	Получение уравнений $(\|x\|-1)^2=4+\frac{6}{a}$ и $(\|x\|+1)^2=\frac{6}{a}-2$.	2 б.
4.	Обоснованное получение неравенств $4+\frac{6}{a}\geq 0$ и $\frac{6}{a}-2\geq 1$.	2 б.
5.	Получение ответа $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup(0;+\infty)$.	1 б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.3. Пусть ABC - равнобедренный треугольник, в котором $AC = BC$. Точка M – середина стороны AB, N – основание перпендикуляра, проведенного через точку M на AC, а P – середина отрезка MN. Докажите, что прямые BN и CP взаимно перпендикулярны.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1.	Правильный рисунок и проведение отрезка MQ, где Q является серединой отрезка AN ($MQ \| \| BN$).	1 б.
2.	Доказывается, что $m(\angle A) = m(\angle CMN)$.	1 б.
3.	Доказывается, что $m(\angle MCP) = m(\angle AMQ)$.	2 б.
4.	Доказывается, что углы MPK и PMK комплементарны.	2 б.
5.	Обоснование перпендикулярности прямых BN и CP.	1 б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.4. Покажите, что целая часть числа $\left(7+4\sqrt{3}\right)^n$ является нечётным числом, для любого натурального числа n.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1.	Уточняется, что для $n = 0$ утверждение верно.	1 б.
2.	Разложение бинома $\left(7+4\sqrt{3}\right)^n$ и выдвижение гипотезы, что $\left(7+4\sqrt{3}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ с $A_n, B_n \in N^*$.	1 б.
3.	Полное изучение случая $n = 2k,\ k \in N^*$.	1 б.
4.	Полное изучение случая $n = 2k-1,\ k \in N^*$.	1 б.
5.	Запись бинома $\left(7-4\sqrt{3}\right)^n$ и вывод соотношения $\left(7+4\sqrt{3}\right)^n + \left(7-4\sqrt{3}\right)^n = 2A_n$.	1 б.
6.	Доказательство соотношения $\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^n\right] = 2A_n - 1$.	2 б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.