Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 3 martie 2019, Clasa a X–a
Barem de evaluare

10.5 Determinaţi toate funcţiile $f: R \to R$, care verifică simultan condiţiile:

1) $|f(x)| \geq 1$, oricare ar fi numărul real *x*.

2) $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}$, oricare ar fi numerele reale *x* şi *y*.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se obţine relaţia echivalentă cu relaţia 2): $f(x+y)\cdot(1+f(x)\cdot f(y)) = f(x)+f(y)$, $(\forall)x \in R, (\forall)y \in R$ şi se menţionează că $f(x)\cdot f(y) \neq -1$, $(\forall)x \in R, (\forall)y \in R$.	1p.
2	Se consideră $y=0$ (sau $x=0$) şi se obţine $f(0)\cdot\left(1-f^2(x)\right)=0$, $(\forall)x \in R$.	2p.
3	Se demonstrează că $1-f^2(x)=0$, $(\forall)x \in R$.	2p.
4	Se arată că funcţia *f* poate fi doar identic egală cu 1 sau cu -1.	1p.
5	Se scrie răspunsul corect: $f: R \to R, f(x)=1$ sau $f: R \to R, f(x)=-1$.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.6 Rezolvaţi în R ecuaţia

$$\sqrt{2x^5+x^4+4x^3+2x^2+2x+1}+\sqrt{17-2x+34x^2-4x^3+17x^4-2x^5}=7x^2-8x+22 .$$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se demonstrează că membrul stâng al ecuaţiei date este mai mic sau egal cu $6\left(x^2+1\right)$ pe *DVA.*	3p.
2	Se arată că $7x^2-8x+22 \geq 6x^2+6$, pentru orice $x \in DVA$.	2p.
3	Se menţionează că egalitatea are loc pentru *x*=4, se verifică aceasta şi se obţine răspunsul corect.	2p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.7 În triunghiul ABC mediana AM şi bisectoarea BN se intersectează în punctul P. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă se ştie că dreptele MN şi BC sunt reciproc perpendiculare, iar $BP:AN=3:2$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	**Etape ale rezolvării**	**Punctaj acordat**
1	Se construieşte desenul şi se trasează $NQ \parallel AM$, $Q \in BC$.	1p.
2	Se demonstrează că $\frac{CQ}{MQ}=\frac{3x}{y}-1$, unde $BP=3x$, $AN=2x$, $PN=y$.	1p.
3	Se demonstrează că $\frac{CQ}{MQ}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}$	1p.
4	Se obţine egalitatea $y=x$.	1p.
5	Se demonstrează că $AB=BM$.	1p.
6	Se demonstrează că $m(\angle BAC)=90^\circ$.	1p.
7	Se obţine $m(\angle ACB)=30^\circ$, $m(\angle ABC)=60^\circ$.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.8 Fie a, b şi c lungimile laturilor unui triunghi arbitrar cu perimetrul egal cu 1. Arătaţi că are loc relaţia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{9}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}}$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	**Etape ale rezolvării**	**Punctaj acordat**
1	Se obţine relaţia $\frac{1}{\sqrt{1-c}}<\frac{1}{c}$.	2p.
2	Se obţine relaţia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}$.	1p.
3	Se demonstrează inegalitatea $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)\geq 9$, $(\forall)x,y,z\in R_+^*$	1p.
4	Se obţine inegalitatea $\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}\right)\left(\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}\right)\geq 9$.	1p.
5	Se obţine inegalitatea $\frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}\geq\frac{9}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}}$.	1p.
6	Se obţine inegalitatea $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{9}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}}$.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*