Республиканская Олимпиада по Математике
Второй день, 3 марта 2019 года, X-й класс

Схема оценивания

10.5 Найдите все функции $f:R\to R$, которые удовлетворяют одновременно условиям:

1) $|f(x)|\geq 1$, для любого действительного числа *x.*
2) $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}$, для любых действительных чисел *x* и *y*.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение соотношения, эквивалентного условию 2): $f(x+y)\cdot(1+f(x)\cdot f(y))=f(x)+f(y)$, $(\forall)x\in R,(\forall)y\in R$ и уточнение, что $f(x)\cdot f(y)\neq -1$, $(\forall)x\in R,(\forall)y\in R$.	1 б.
2.	Предположение, что $y=0$ (или $x=0$) и получение $f(0)\cdot\left(1-f^2(x)\right)=0$, $(\forall)x\in R$.	2 б.
3.	Доказательство, что $1-f^2(x)=0$, $(\forall)x\in R$.	2 б.
4.	Показано, что функция f может быть идентично равна только 1 или -1.	1 б.
5.	Запись правильного ответа: $f:R\to R, f(x)=1$ или $f:R\to R, f(x)=-1$.	1 б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.6 Решите на множестве R уравнение

$$\sqrt{2x^5+x^4+4x^3+2x^2+2x+1}+\sqrt{17-2x+34x^2-4x^3+17x^4-2x^5}=7x^2-8x+22.$$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Доказательство, что левая часть данного уравнения меньше либо равна $6(x^2+1)$ на *ОДЗ*.	3 б.
2.	Доказательство, что $7x^2-8x+22\geq 6x^2+6$, для любого $x\in$ ОДЗ.	2 б.
3.	Уточнение, что равенство будет выполнено для *x*=4, проверка этого, и получение правильного ответа.	2 б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.7 В треугольнике ABC медиана AM и биссектриса BN пересекаются в точке P. Найдите величины углов треугольника ABC, если известно, что прямые MN и BC взаимно перпендикулярны, а $BP : AN = 3 : 2$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Правильный рисунок и проведение $NQ \| AM, Q \in BC$.	1 б.
2.	Доказательство, что $\frac{CQ}{MQ} = \frac{3x}{y} - 1$, где $BP = 3x$, $AN = 2x$, $PN = y$.	1 б.
3.	Доказательство, что $\frac{CQ}{MQ} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$.	1 б.
4.	Получение соотношения $y = x$.	1 б.
5.	Доказательство, что $AB = BM$.	1 б.
6.	Доказательство, что $m(\angle BAC) = 90^\circ$.	1 б.
7.	Получение $m(\angle ACB) = 30^\circ$, $m(\angle ABC) = 60^\circ$.	1 б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.8 Пусть a, b и c длины сторон некоторого произвольного треугольника с периметром равным 1.

Покажите, что имеет место неравенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{9}{\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}}$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение соотношения $\frac{1}{\sqrt{1-c}} < \frac{1}{c}$.	2 б.
2.	Получение соотношения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{1}{\sqrt{1-b}} + \frac{1}{\sqrt{1-c}}$	1 б.
3.	Доказательство неравенства $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x+y+z) \geq 9$, $(\forall)x, y, z \in R_{+}^{*}$.	1 б.
4.	Получение неравенства $\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{1}{\sqrt{1-b}} + \frac{1}{\sqrt{1-c}}\right)\left(\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}\right) \geq 9$.	1 б.
5.	Получение неравенства $\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{1}{\sqrt{1-b}} + \frac{1}{\sqrt{1-c}} \geq \frac{9}{\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}}$.	1 б.
6.	Получение неравенства $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{9}{\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}}$.	1 б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.