Olimpiada Republicană la Matematică

A doua zi, 3 martie 2019, Clasa a X–a

Soluţii

10.5. Determinaţi toate funcţiile $f: R \to R$, care verifică simultan condiţiile:

1) $|f(x)| \geq 1$, oricare ar fi numărul real *x.*

2) $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}$, oricare ar fi numerele reale *x* şi *y*.

Soluţie: Întrucât relaţia a doua are loc pentru orice valori reale ale numerelor x şi y, $f(x)\cdot f(y) \neq -1$, $(\forall)x \in R, (\forall)y \in R$.

Relaţia 2) este echivalentă cu $f(x+y)\cdot(1+f(x)\cdot f(y)) = f(x)+f(y)$, $(\forall)x \in R, (\forall)y \in R$.

În particular, pentru $y=0$, obţinem $f(x)\cdot(1+f(x)\cdot f(0)) = f(x)+f(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(0)\cdot(1-f^2(x)) = 0$, $(\forall)x \in R$.

Întrucât $|f(x)| \geq 1$, oricare ar fi numărul real *x*, atunci $f(0) \neq 0$.

Obţinem că $1-f^2(x)=0$, $(\forall)x \in R$.

Vom arăta că funcţia f poate fi identic egală cu 1 sau identic egală cu -1 pe *R.*

Dacă presupunem că pentru un careva x real avem $f(x)=1$, iar pentru un careva y real, $y \neq x$, vom avea $f(y)=-1$, vom obţine $1+f(x)\cdot f(y)=0$, deci nu va fi verificată relaţia 2).

Răspuns: $f: R \to R, f(x)=1$ sau $f: R \to R, f(x)=-1$

10.6. Rezolvaţi în R ecuaţia

$$\sqrt{2x^5+x^4+4x^3+2x^2+2x+1}+\sqrt{17-2x+34x^2-4x^3+17x^4-2x^5} = 7x^2-8x+22\,.$$

Soluţie: Vom aplica inegalitatea $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, care este adevărată pentru orice numere reale a şi b.

Pe *DVA* are loc inegalitatea

$$\frac{\sqrt{2x^5+x^4+4x^3+2x^2+2x+1}+\sqrt{17-2x+34x^2-4x^3+17x^4-2x^5}}{2} \leq \sqrt{\frac{18x^4+36x^2+18}{2}} = 3(x^2+1).$$

Atunci

$$\sqrt{2x^5+x^4+4x^3+2x^2+2x+1}+\sqrt{17-2x+34x^2-4x^3+17x^4-2x^5} \leq 6(x^2+1).$$

Vom arăta că pe DVA avem $7x^2-8x+22 \geq 6x^2+6 \Leftrightarrow x^2-8x+16 \geq 0 \Leftrightarrow x \in R$

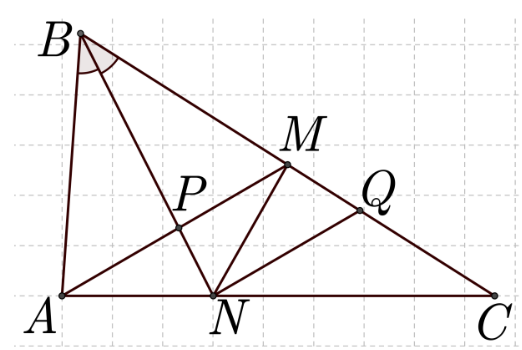
Egalitatea are loc doar pentru *x*=4.

Verificăm dacă numărul 4 este soluţie a ecuaţiei şi ne convingem că este soluţie.

Răspuns: $S=\{4\}$

10.7. În triunghiul *ABC* mediana *AM* şi bisectoarea *BN* se intersectează în punctul *P.* Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*, dacă se ştie că dreptele *MN* şi *BC* sunt reciproc perpendiculare, iar $BP : AN = 3:2$.

Soluţie: Fie $NQ \,||\, AM$, $Q \in BC$. Din ipoteză avem $BP=3x$, $AN=2x$. Fie $PN=y$. În triunghiul *BCN* segmentul *MN* este mediană şi înălţime, atunci triunghiul este isoscel, iar $BN=CN=3x+y$. Întrucât $PM \,||\, NQ$, conform teoremei lui Thales în



triunghiul BNQ, avem $\frac{BM}{MQ}=\frac{3x}{y}=\frac{CM}{MQ}$. Putem scrie $\frac{CQ}{MQ}=\frac{CM-MQ}{MQ}=\frac{CM}{MQ}-1=\frac{3x}{y}-1$.

Întrucât $NQ||AM$, conform teoremei lui Thales în triunghiul ACM, avem $\frac{CQ}{MQ}=\frac{CN}{AN}=\frac{3x+y}{2x}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}$. Prin urmare $3\cdot\frac{x}{y}-1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}$. Notăm $\frac{x}{y}=t$, $t>0$.

Obţinem ecuaţia $3t-1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2t} \Leftrightarrow 6t^2-5t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=-\frac{1}{6} \end{array}\right. \Rightarrow t=1 \Rightarrow y=x$.

Observăm că $BN=CN=4x$. Aplicând teorema bisectoarei în triunghiul ABC obţinem $\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{2BM}=\frac{AN}{CN}=\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2} \Rightarrow AB=BM$. Conform criteriului de congruenţă a triunghiurilor (LUL), rezultă că $\Delta ABN\equiv\Delta MBN$. Triunghiul MBN, fiind dreptunghic, rezultă că $m(\angle BAC)=90^\circ$. Întrucât $AB=\frac{1}{2}\cdot BC$, rezultă că $m(\angle ACB)=30^\circ$, iar $m(\angle ABC)=60^\circ$.

Răspuns: $m(\angle BAC)=90^\circ$, $m(\angle ACB)=30^\circ$, $m(\angle ABC)=60^\circ$.

10.8. Fie a, b şi c lungimile laturilor unui triunghi arbitrar cu perimetrul egal cu 1.

Arătaţi că are loc relaţia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{9}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}}$.

Soluţie: Din ipoteză avem $a+b+c=1$.

Întrucât a, b şi c sunt lungimile laturilor unui triunghi, are loc $a+b>c$, $c\in(0;1)$, atunci

$\sqrt{a+b}>\sqrt{c}>c \Leftrightarrow \sqrt{1-c}>c \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-c}}<\frac{1}{c}$.

Idem $\frac{1}{\sqrt{1-a}}<\frac{1}{a}$ şi $\frac{1}{\sqrt{1-b}}<\frac{1}{b}$, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}$.

Vom arăta că $\frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}>\frac{9}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}\right)\left(\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}\right)>9$.

Vom arăta că pentru orice numere reale pozitive x, y şi z are loc inegalitatea

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)\geq 9 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geq 9, (MA-MG)$

Atunci este adevărată inegalitatea $\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}\right)\left(\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}\right)\geq 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}\geq\frac{9}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}}$.

În final $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}\geq\frac{9}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{9}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}}$.