

Olimpiada Republicană la Matematică

Prima zi, 2 martie 2019, Clasa a XI-a

Barem de evaluare

11.1. Determinați valorile de extrem ale funcției $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos x + \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x$.		
Etapе ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etapе ale rezolvării	Punctaj acordat
1	$f'(x) = (\cos x - \sin x) \left[1 - \frac{\cos x + \sin x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right]$	1
2	$\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$	1
3	Ecuția $1 - \frac{\cos x + \sin x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 0$ nu are soluții.	1
4	$f''(x) = -\sin x - \cos x + \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} + \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$	1
5	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 - \sqrt{2} > 0$	1
6	$x = \frac{\pi}{4}$ este punct de minim	1
7	$f_{\min}(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + \sqrt{2}$	1
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

11.2. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2+3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2+3+\dots+n}\right) \right)$.		
Etapе ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etapе ale rezolvării	Punctaj acordat
1	$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1
2	$S_n - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1

3	$P_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2+3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2+3+\dots+n}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{S_k}{S_k - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1
4	$P_n = \frac{\left(\prod_{k=2}^n k\right) \cdot \left(\prod_{k=3}^{n+1} k\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) \cdot \left(\prod_{k=4}^{n+2} k\right)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1
5	$P_n = \frac{3 \cdot n! \cdot (n+1)!}{(n-1)! \cdot (n+2)!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1
6	$P_n = \frac{3 \cdot n}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1
7	$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 3$	1
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

<p>11. 3. Determinați toate funcțiile continue $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, care verifică relația</p> $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{y} - \frac{f(y)}{x}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	$f(1) = 0, \quad f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y), \quad f(x \cdot y) = y \cdot f(x) + \frac{f(y)}{x}.$	1
2	$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \neq 1$ e adevărat că $f(x^n) = f(x) \cdot \frac{x^{2n} - 1}{(x^2 - 1) \cdot x^{n-1}}$	1
3	$\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+^*, x \neq 1$ e adevărat că $f(x^{\frac{m}{n}}) = f(x) \cdot \frac{x^{2\frac{m}{n}} - 1}{(x^2 - 1) \cdot x^{\frac{m}{n}-1}}$	1
4	$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1: f(x^\alpha) = f(x) \cdot \frac{x^{2\alpha} - 1}{(x^2 - 1) \cdot x^{\alpha-1}}.$	1
5	$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1: f(x) = C \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$	2
6	Verificarea dacă funcția $f(x) = C \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right), x \in \mathbb{R}_+^*$ este soluția.	1
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

11.4. În pocal, secțiunea axială a căruia este graficul funcției $y = x^4$, se pune o "vișină" – bilă de rază R . Pentru care valori ale lui R bila atinge fundului pocalului (punctul $(0,0)$)?

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Centrul cercului este pe axa Oy în punctul $O_1 = (0; R)$.	1
2	Condițiile prezenței punctelor comune în cerc (O_1, R) și graficul G_{x^4} .	1
3	Condiția când dreapta $y = 2Rt$ este tangentă graficului funcției $g(t) = 1 + t^3$ ($t > 0$).	2
4	Calcularea $R_0 = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$, $x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.	1
6	Cazul $R \in [0, R_0]$.	1
7	Cazul $R > R_0$.	1
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

Olimpiada Republicană la Matematică

A doua zi, 3 martie 2019, Clasa a XI-a

Barem de evaluare

11.5. Comparați numerele $X = 2019^{\log_{2018} 2017}$ și $Y = 2017^{\log_{2019} 2020}$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	$\ln X = \frac{\ln 2019 \cdot \ln 2017}{\ln 2018}$	
2	$X = 2017^{\log_{2018} 2019}$	
3	$\ln \sqrt{2018 \cdot 2020} < \ln 2019$	
4	$\ln 2019 > \frac{1}{2} \ln(2018 \cdot 2020)$	
5	$\ln 2019 > \sqrt{\ln 2018 \cdot \ln 2020}$	
6	$\log_{2018} 2019 > \log_{2019} 2020$	
7	$X > Y$	
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

11.6. O sferă trece prin toate vârfurile unei fețe a cubului și este tangentă la toate muchiile feței opuse a cubului. Găsiți raportul dintre volumul sferei și volumul cubului.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Introducerea sistemului de coordonate	1
2	Coordonatele vârfurilor feței $ABCD$	1
3	Coordonatele punctelor de atingere - mijlocul laturilor pătratului $A_1B_1C_1D_1$	1
4	Ecuția sferei cu centrul $O = (x_0, y_0, z_0)$ și raza R	1
5	Formarea unui sistem de ecuații pentru coordonate	1
6	Calcularea $R = a \cdot \frac{\sqrt{41}}{8}$.	1
7	Calcularea relației $\frac{V_{sferei}}{V_{cubului}} = \frac{41\pi\sqrt{41}}{384}$.	1
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

11.7. Să se arate că dacă numerele reale a, b, c satisfac relațiile

$$a + b + c = 4,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6,$$

atunci

$$\frac{86}{9} \leq a^3 + b^3 + c^3 \leq 10.$$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Exprimarea condițiilor problemei prin polinoame simetrice elementare p, q, r și $s = a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r$	1
2	$s = s(r) = 3r + 4, \quad q = 5.$	1
3	Numerele a, b, c sunt rădăcinile polinomului $x^3 - px^2 + qx - r = 0.$	1
4	Cazul $a = b = c$	1
5	$x^3 - 4x^2 + 5x \iff f(x)$ și extremele funcției $f(x)$.	1
6	Condiția $f_{\min} \leq r \leq f_{\max}.$	1
7	$\frac{50}{27} \leq r \leq 2 \implies \frac{86}{9} \leq s = 3r + 4 \leq 10.$	1
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

11.8. Fie șirul $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \underbrace{11\dots1}_{n \text{ cifre}} \underbrace{88\dots8}_{n \text{ cifre}}$, $\forall n \geq 1$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{a_n}\}$, unde $\{t\}$ reprezintă partea

fracționară a numărului t .

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	$a_n = b_n(10^n + 8), \forall n \geq 1$	1
2	$a_n = c_n(c_n + 3), \forall n \geq 1$	1
3	$c_n + 1 < \sqrt{a_n} < c_n + 2, \forall n \geq 1$	1
4	$[\sqrt{a_n}] = c_n + 1, \forall n \geq 1$	1
5	$\{\sqrt{a_n}\} = \frac{c_n - 1}{\sqrt{c_n(c_n + 3)} + (c_n + 1)}, \forall n \geq 1$	2
6	$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{a_n}\} = \frac{1}{2}$	1
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.