Республиканская Олимпиада по Математике
Первый день, 2 марта 2019 года, XI-й класс
Схема оценивания

11.1. *Определить экстремальные значения функции* $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to R$,

$$f(x)=\sin x+\cos x+tgx+ctgx.$$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	$f'(x)=(\cos x-\sin x)\left[1-\frac{\cos x+\sin x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right]$	1
2	$\cos x-\sin x=0\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{4}$	1
3	Уравнение $1-\frac{\cos x+\sin x}{\sin^2 x\cos^2 x}=0$ не имеет решений.	1
4	$f''(x)=-\sin x-\cos x+\frac{2\sin x}{\cos^3 x}+\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$	1
5	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=8-\sqrt{2}>0$	1
6	$x=\frac{\pi}{4}$ есть точка минимума.	1
7	$f_{\min}(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2+\sqrt{2}$	1
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.2. *Вычислить предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2+3+\ldots+n}\right)\right)$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	$S_n=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$	1
2	$S_n-1=\frac{(n-1)(n+2)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	1
3	$P_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2+3+\ldots+n}\right)=\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{S_k}{S_k-1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	1

4	$P_n = \dfrac{\left(\prod\limits_{k=2}^{n} k\right)\cdot\left(\prod\limits_{k=3}^{n+1} k\right)}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1} k\right)\cdot\left(\prod\limits_{k=4}^{n+2} k\right)},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	1
5	$P_n = \dfrac{3\cdot n!\cdot(n+1)!}{(n-1)!\cdot(n+2)!},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	1
6	$P_n = \dfrac{3\cdot n}{n+2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	1
7	$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 3$	1
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11. 3. *Найти все непрерывные функции* $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$*, которые удовлетворяют условию*

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{y}-\frac{f(y)}{x},\quad \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*.$$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	$f(1)=0,\quad f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y),\quad f(x\cdot y)=y\cdot f(x)+\frac{f(y)}{x}.$	1
2	$\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 2,\ x\ne 1$ верно, что $f(x^n)=f(x)\cdot\dfrac{x^{2n}-1}{(x^2-1)\cdot x^{n-1}}$	1
3	$\forall \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}_+^*,\ x\ne 1$ верно, что $f(x^{\frac{m}{n}})==f(x)\cdot\dfrac{x^{2\cdot\frac{m}{n}}-1}{(x^2-1)\cdot x^{\frac{m}{n}-1}}$	1
4	$\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ x\ne 1:\quad f(x^\alpha)=f(x)\cdot\dfrac{x^{2\alpha}-1}{(x^2-1)\cdot x^{\alpha-1}}.$	1
5	$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ x\ne 1:\quad f(x)=C\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$	2
6	Проверка, что функция $f(x)=C\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right),\quad x\in\mathbb{R}_+^*$ является решением.	1
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.4. *В бокал, осевое сечение которого есть график функции* $y = x^4$, *положили «вишенку» - шар радиуса* R. *Для каких значений* R *шар касается дна бокала (точки* $(0,0)$ *)?*

Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Центр круга находится на оси Oy в точке $O_1 = (0; R)$.	1
2	Условия существования общих точек круга (O_1, R) и графика G_{x^4}	1
3	Условие когда прямая $y = 2Rt$ касается графика функции $g(t) = 1 + t^3$ ($t > 0$).	2
4	Вычисление $R_0 = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4}$, $x_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$.	1
6	Случай $R \in [0, R_0]$.	1
7	Случай $R > R_0$.	1
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Республиканская Олимпиада по Математике

Второй день, 3 марта 2019 года, XI-й класс

Схема оценивания

11.5. *Сравните числа* $X = 2019^{\log_{2018} 2017}$ *и* $Y = 2017^{\log_{2019} 2020}$.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	$\ln X = \dfrac{\ln 2019 \cdot \ln 2017}{\ln 2018}$	
2	$X = 2017^{\log_{2018} 2019}$	
3	$\ln\sqrt{2018 \cdot 2020} < \ln 2019$	
4	$\ln 2019 > \dfrac{1}{2}\ln(2018 \cdot 2020)$	
5	$\ln 2019 > \sqrt{\ln 2018 \cdot \ln 2020}$	
6	$\log_{2018} 2019 > \log_{2019} 2020$	
7	$X > Y$	
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.6. *Сфера проходит через все вершины одной грани куба и касается всех ребер противоположной грани куба. Найдите отношение объема сферы к объему куба.*		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Введение системы координат	1
2	Координаты вершин грани $ABCD$	1
3	Координаты точек касания – середин сторон квадрата $A_1B_1C_1D_1$	1
4	Уравнение сферы с центром в точке $O = (x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R	1
5	Составление системы уравнений для координат	1
6	Вычисление $R = a \cdot \dfrac{\sqrt{41}}{8}$.	1
7	Вычисление отношения $\dfrac{V_{sferei}}{V_{cubului}} = \dfrac{41\pi\sqrt{41}}{384}$.	1
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.7. *Докажите, что если действительные числа* a, b, c *удовлетворяют условиям* $$a+b+c=4,$$ $$a^2+b^2+c^2=6,$$ *то* $$\frac{86}{9} \le a^3+b^3+c^3 \le 10.$$		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Выражение условий задачи через элементарные симметрические полиномы p, q, r и $s = a^3+b^3+c^3 = p^3-3pq+3r$	1
2	$s = s(r) = 3r+4, \qquad q=5.$	1
3	Числа a, b, c являются корнями полинома $x^3 - px^2 + qx - r = 0.$	1
4	Случай $a=b=c$	1
5	$r = x^3 - px^2 + qx = x^3 - 4x^2 + 5x \rightleftharpoons f(x)$	1
6	Условие $f_{\min} \le r \le f_{\max}$.	1
7	$\frac{50}{27} \le r \le 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{86}{9} \le s = 3r+4 \le 10.$	1
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.8. *Пусть дана последовательность* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\ цифр}\underbrace{88\ldots8}_{n\ цифр}$, $\forall n \ge 1$. *Вычислите предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a_n}\right\}$, *где* $\{t\}$ *есть дробная часть числа* t.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	$a_n = b_n(10^n+8)$, $\forall n \ge 1$	1
2	$a_n = c_n(c_n+3)$, $\forall n \ge 1$	1
3	$c_n + 1 < \sqrt{a_n} < c_n + 2$, $\forall n \ge 1$	1
4	$\left[\sqrt{a_n}\right] = c_n + 1$, $\forall n \ge 1$	1
5	$\left\{\sqrt{a_n}\right\} = \frac{c_n - 1}{\sqrt{c_n(c_n+3)} + (c_n+1)}$, $\forall n \ge 1$	2
6	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a_n}\right\} = \frac{1}{2}$	1
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*