Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 2 martie 2019, Clasa a XI–a

Soluţii

11.1. *Determinați valoarilede extrem a funcției* $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+\cos x+tgx+ctgx$.

Soluție.

$$f'(x)=\cos x-\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=\cos x-\sin x+\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=$$
$$=\cos x-\sin x-\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=(\cos x-\sin x)\left[1-\frac{\cos x+\sin x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right].$$

În $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ avem

1) $f'(x)=0 \Rightarrow \cos x=\sin x \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$

sau

2) $f'(x)=0 \Rightarrow \cos x+\sin x=\sin^2 x\cos^2 x \Rightarrow$
$\Rightarrow 1\le 1+2\sin x\cos x=\sin^4 x\cos^4 x=\frac{1}{16}\sin^4 2x\le\frac{1}{16} \Rightarrow x\in\varnothing$

$$f''(x)=-\sin x-\cos x+\frac{2\sin x}{\cos^3 x}+\frac{2\cos x}{\sin^3 x}\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+4+4=8-\sqrt{2}>0.$$

Deci, $x=\frac{\pi}{4}$ este punct de minim și

$$f_{\min}(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+tg\frac{\pi}{4}+ctg\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1+1=2+\sqrt{2}.$$

11.2. *Calculați limita* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2+3+\ldots+n}\right)\right)$.

Soluție.

Fie $P_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2+3+\ldots+n}\right)$.

$$S_n=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$$

$$S_n-1=2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{n^2+n-2}{2}=\frac{(n-1)(n+2)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$$

$$P_n=\frac{S_2}{S_2-1}\cdot\frac{S_3}{S_3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{S_n}{S_n-1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{S_k}{S_k-1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)}=$$

$$=\frac{\left(\prod_{k=2}^{n}k\right)\cdot\left(\prod_{k=3}^{n+1}k\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n-1}k\right)\cdot\left(\prod_{k=4}^{n+2}k\right)}=\frac{n!\cdot\frac{(n+1)!}{1\cdot 2}}{(n-1)!\cdot\frac{(n+2)!}{1\cdot 2\cdot 3}}=\frac{3\cdot n!\cdot(n+1)!}{(n-1)!\cdot(n+2)!}=\frac{3\cdot n}{n+2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n}{n+2}=3..$$

11. 3. *Determinați toate fincțiile continue* $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, *care verifică relația*

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{y}-\frac{f(y)}{x},\quad \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*.$$

Soluție.

1) $$f(1)=f\left(\frac{x}{x}\right)=\frac{f(x)}{x}-\frac{f(x)}{x}=0.$$

2) $$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{f(1)}{y}-\frac{f(y)}{1}=\frac{0}{y}-f(y)=-f(y).$$

3) $$f(x\cdot y)=f\left(\frac{x}{1/y}\right)=\frac{f(x)}{1/y}-\frac{f\left(1/y\right)}{x}=y\cdot f(x)+\frac{f(y)}{x}.$$

4) $$f(x^2)=f(x\cdot x)=x\cdot f(x)+\frac{f(x)}{x}=f(x)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Lema. *Pentru* $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2, x\neq 1$ *are loc relația*:

$$f(x^n)=f(x)\cdot\frac{x^{2n}-1}{(x^2-1)\cdot x^{n-1}}.\quad (1)$$

Demonstrație. Demonstrăm prin inducție.

$n=2$:

$$f(x^2)=f(x)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=f(x)\cdot\frac{x^2+1}{x}=f(x)\cdot\frac{x^4-1}{(x^2-1)\cdot x}.$$

Presupunem că formula (1) este adevărată pentru $n=m.$ Atunci

$$f(x^{m+1})=f(x^m\cdot x)=x\cdot f(x^m)+\frac{f(x)}{x^m}=x\cdot f(x)\cdot\frac{x^{2m}-1}{(x^2-1)x^{m-1}}+f(x)\cdot\frac{1}{x^m}=$$

$$=f(x)\cdot\left[\frac{x^{2m}-1}{(x^2-1)x^{m-2}}+\frac{1}{x^m}\right]=f(x)\cdot\frac{x^2(x^{2m}-1)+(x^2-1)}{(x^2-1)x^m}=f(x)\cdot\frac{x^{2(m+1)}-1}{(x^2-1)x^{(m+1)-1}}.$$

Deci formula (1) are loc pentru $\forall n\in\mathbb{N}$.

Găsim $f\left(x^{\frac{m}{n}}\right)$, unde $m,n\in\mathbb{N}^*$.

5) $$f(x)=f\left(\left(x^{1/n}\right)^n\right)=f\left(x^{1/n}\right)\cdot\frac{\left(x^{1/n}\right)^{2n}-1}{\left(\left(x^{1/n}\right)^2-1\right)\cdot\left(x^{1/n}\right)^{n-1}}=f\left(x^{1/n}\right)\cdot\frac{x^2-1}{(x^{2/n}-1)\cdot x^{\frac{n-1}{n}}},$$

adică

$$f\left(x^{1/n}\right) = f(x)\cdot\frac{(x^{2/n}-1)\cdot x^{\frac{n-1}{n}}}{x^2-1}.$$

6) $$f\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = f\left(\left(x^{1/n}\right)^m\right) = f\left(x^{1/n}\right)\cdot\frac{\left(x^{1/n}\right)^{2m}-1}{\left(\left(x^{1/n}\right)^2-1\right)\cdot x^{\frac{m-1}{n}}} = f(x)\cdot\frac{\left(x^{2/n}-1\right)\cdot x^{\frac{n-1}{n}}}{x^2-1}\cdot\frac{x^{2\frac{m}{n}}-1}{\left(x^{2/n}-1\right)\cdot x^{\frac{m}{n}-1}} =$$

$$= f(x)\cdot\frac{x^{2\cdot\frac{m}{n}}-1}{(x^2-1)\cdot x^{\frac{m}{n}-1}}. \quad (2)$$

7) Deoarece f - funcție continuă pe $\mathbb{R}_+^*$, atunci pentru $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ luăm un șir $\{u_n\}\in\mathbb{Q}_+^*$, care converge la α. Conform continuității din (2) obținem că:

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*:\quad f(x^\alpha) = f(x)\cdot\frac{x^{2\alpha}-1}{(x^2-1)\cdot x^{\alpha-1}}.$$

8) Fie $x>1;$ atunci $\ln x>0,$ și

$$f(x) = f\left(e^{\ln x}\right) = f(e)\cdot\frac{e^{2\ln x}-1}{(e^2-1)e^{\ln x-1}} = f(e)\cdot\frac{x^2-1}{(e^2-1)\cdot\frac{x}{e}} = \frac{e\cdot f(e)}{e^2-1}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right) = C\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right),$$

unde $C=\dfrac{e\cdot f(e)}{e^2-1}$ – constantă, care poate lua valori arbitrare.

Dacă $x=1,$ atunci $f(x)=0.$

Dacă $0<x<1,$ atunci utilizăm proprietatea 2) și 8) și obținem pentru $u=\dfrac{1}{x}>1$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{u}\right) = -f(u) = -\frac{e\cdot f(e)}{e^2-1}\cdot\left(u-\frac{1}{u}\right) = \frac{e\cdot f(e)}{e^2-1}\cdot\left(\frac{1}{u}-u\right) = \frac{e\cdot f(e)}{e^2-1}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right) = C\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right).$$

În cele din urmă este ușor de verificat că orice funcție de forma

$$f(x) = C\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right),\quad C\in\mathbb{R},$$

satisface ecuația inițială a funcției:

$$C\cdot\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{y}-\frac{f(y)}{x} = \frac{1}{y}\cdot C\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\cdot C\cdot\left(y-\frac{1}{y}\right) =$$

$$= C\cdot\left[\frac{x}{y}-\frac{1}{xy}-\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}\right] = C\cdot\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right).$$

11.4. *În pocal, secțiunea axială a căruia este graficul funcției* $y=x^4$, *se pune o ”vișină” – bilă de rază* R. *Pentru care valori ale lui* R *bila atinge fundului pocalului (punctul* $(0,0)$ *)?*

Soluție.
Cercetăm secțiunea axială indicată. Deoarece secțiunea axială a bilei este un cerc de rază R, atunci acest cerc trebuie să fie tangent la axa Ox în punctul $O=(0;0)$. Prin urmare centrul cercului se află pe axa Oy în punctul $O_1=(0;R)$.

Scriem condiția că graficul circumferinței de rază R cu centrul în punctul $O_1=(0;R)$ și graficul funcției $y=x^4$ au puncte comune (adică ele sau se intersectează, sau sunt tangente).

$$\begin{cases} x^2+(y-R)^2=R^2 \\ y=x^4 \end{cases}$$

$$x^2+\left(x^4-R\right)^2=R^2$$

$$x^2(1+x^6-2Rx^2)=0.$$

Valoarea $x_1=0$ dă punctul de tangență a graficelor în originea de coordonate. Prin urmare alte puncte de tangență (de intersecție) a graficelor sunt date de condiția

$$1+x_0^6=2Rx_0^2, \quad x_0\neq 0.$$

Notăm $x_0^2=t>0$. Atunci avem

$$1+t^3=2Rt, \quad t>0.$$

Această ecuație are soluție atunci și numai atunci când dreapta $y=2Rt$ (care trace prin punctul $(0,0)$) este tangentă sau intersectează graficul G_g funcției $g(t)=1+t^3$ (pentru $t>0$).
Găsim condiția de tangență a graficelor fincțiilor. Tangentă la graficul G_g are ecuația

$$y-g(t_0)=g'(t_0)\cdot(t-t_0).$$

Atunci

$$y=1+t_0^3+3t_0^2\cdot(t-t_0)=3t_0^2\cdot t+(1-2t_0^3).$$

Pe de alta parte $y=2Rt$. Prin urmare

$$\begin{cases} 3t_0^2=2R \\ 1-2t_0^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_0=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4} \\ x_0=\pm\sqrt{t_0}=\pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}} \end{cases}$$

Deci:

1) Pentru $0<R<R_0$ cercul $O_1=(0;R)$ are doar 1 punct comun cu graficul funcției $y=x^4$ - originea de coordonate $O=(0;0)$.
2) Pentru $R=R_0$ cercul $0<R<R_0$ are 3 puncte comune cu graficul funcției $y=x^4$ cu abscisele $0,\pm x_0=\pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

Să arătăm, că pentru $R>R_0=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4}$, dacă „vișină” este tangentă la fundul pocalului, atunci ea iese din limitele pereților acestuia. Pentru aceasta este suficient să arătăm, că există așa $x_0\in[-R,R]$ încât

$$f(x_0)=R-\sqrt{R^2-x_0^2}-x_0^4<0$$

(graficul funcției $y = x^4$ în punctul $x = x_0$ se află *mai sus* de semicercului de jos $y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$). Fie luăm $x_0 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$. Atunci esta ușor de verificat că

1) $x_0 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} < \frac{3\sqrt[3]{2}}{4} = R_0 < R \quad \Rightarrow \quad x_0 \in [-R, R].$

2) pentru $R > R_0 = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$

$$R - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < \sqrt{R^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < 0.$$

Rezultă că soluțiile problemei va fi valorile $R \in [0, R_0] \equiv \left[0, \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\right]$.

Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 3 martie 2019, Clasa a XI–a
Soluţii

11.5. *Comparați numerele* $X = 2019^{\log_{2018} 2017}$ *și* $Y = 2017^{\log_{2019} 2020}$.

Soluție.
Avem

$$\ln X = \ln\left(2019^{\log_{2018} 2017}\right) = \log_{2018} 2017 \cdot \ln 2019 =$$

$$= \frac{\ln 2019 \cdot \ln 2017}{\ln 2018} = \log_{2018} 2019 \cdot \ln 2017 = \ln\left(2017^{\log_{2018} 2019}\right),$$

ceea ce implică $X = 2017^{\log_{2018} 2019}$. Utilizăm inegalitatea mediilor pentru numerele pozitive distincte 2018 și 2020. Obținem inegalitatea $\sqrt{2018 \cdot 2020} < \frac{2018+2020}{2} = 2019$, ceea ce implică $\ln\sqrt{2018 \cdot 2020} < \ln 2019$. În continuare, utilizând inegalitatea mediilor pentru numerele pozitive distincte $\ln 2018$ și $\ln 2020$, avem

$$\ln 2019 > \ln\sqrt{2018 \cdot 2020} = \frac{1}{2}\ln(2018 \cdot 2020) = \frac{\ln 2018 + \ln 2020}{2} > \sqrt{\ln 2018 \cdot \ln 2020},$$

de unde rezultă $(\ln 2019)^2 > \ln 2018 \cdot \ln 2020$, adică $\frac{\ln 2019}{\ln 2018} > \frac{\ln 2020}{\ln 2019}$, echivalent cu $\log_{2018} 2019 > \log_{2019} 2020$. Rezultă că $X = 2017^{\log_{2018} 2019} > 2017^{\log_{2019} 2020} = Y$.

11.6. *O sferă trece prin toate vârfurile unei fețe a cubului și este tangentă la toate muchiile feței opuse a cubului. Găsiți raportul dintre volumul sferei și volumul cubului.*

Soluție.
Fie sfera trece prin vârfurile *A, B, C, D*. Introducem sistemul de coordonate astfel încât originea coordonatelor să coincidă cu punctul *A*, axa *Ox* este dreapta (*AD*), axa *Oy* este dreapta (*AB*), axa *Oz* este dreapta (AA_1).
Fie muchia cubului este egală cu *a*. Atunci în coordonate

$$A = (0,0,0), \qquad B = (0,a,0), \qquad D = (a,0,0).$$

Ecuația sferei din condițiile problemei cu centrul în punctul $O = (x_0, y_0, z_0)$ și de rază R are forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Deoarece sfera e tangentă la toate muchiile feței $A_1B_1C_1D_1$ a cubului, atunci intersecția sferei cu această față este un cerc, înscris în patratul $A_1B_1C_1D_1$. Acest cerc e tangent la toate laturile patratului $A_1B_1C_1D_1$ în mijlocul laturilor patratului – în punctele *P, Q, T, S*. În coordonate avem

$$P = (a/2, 0, a), \qquad Q = (0, a/2, a), \qquad T = (a/2, a, a), \qquad S = (a, a/2, a).$$

Punctele A, B, D, Q aparțin sferei. De aceea, substituind coordonatele acestora în ecuația sferei, obținem sistemul

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \\ x_0^2 + (y_0 - a)^2 + z_0^2 = R^2 \\ (x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \\ x_0^2 + (y_0 - a/2)^2 + (z_0 - a)^2 = R^2 \end{cases}$$

Atunci rezolvăm sistemul în raport cu necunoscuta R și obținem

$$R = a \cdot \frac{\sqrt{41}}{8}.$$

Deoarece

$$V_{cubului} = a^3, \qquad V_{sferei} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

atunci

$$\frac{V_{sferei}}{V_{cubului}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(a \cdot \frac{\sqrt{41}}{8}\right)}{a^3} = \frac{41\pi\sqrt{41}}{384}.$$

11.7. *Să se arate că dacă numerele reale a, b, c satisfac relațiile*

$$a + b + c = 4,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6,$$

atunci

$$\frac{86}{9} \le a^3 + b^3 + c^3 \le 10.$$

Soluție.

Notăm

$$a + b + c = p$$

$$ab + bc + ac = q$$

$$abc = r$$

$$s = a^3 + b^3 + c^3$$

Atunci din condițiile problemei obținem

$$a + b + c = 4 \Rightarrow p = 4 \quad (1)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \quad \Rightarrow \quad p^2 - 2q = 6 \quad (2)$$

$$(a+b+c)^3 = (-2)\cdot(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc + 3\cdot(a+b+c)\cdot(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$p^3 = -2s + 6r + 3p\cdot(p^2 - 2q).$$

$$s = p^3 - 3pq + 3r \quad (3)$$

Rezolvând în comun ecuațiile (1)-(3), obținem

$$s = s(r) = 3r + 4, \qquad q = 5.$$

Conform teoremei lui Viete numerele a, b, c sunt rădăcinile polinomului

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0.$$

Presupunem, că $a = b = c$. Atunci conform condiției problemei obținem simultan

$$3a = 4, \quad 3a^2 = 6,$$

ce este imposibil. De aceea avem: sau $a = b \neq c \neq a$, sau numerele a, b, c sunt diferite. Utilizând condițiile problemei, obținem

$$r = x^3 - px^2 + qx = x^3 - 4x^2 + 5x \rightleftharpoons f(x)$$

Găsim extremele funcției $f(x)$:

$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0 \\ x_{1,2} = \left[\begin{array}{l} 5/3. \\ 1 \end{array}\right. \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} f_{max} = f(1) = 2 \\ f_{\min} = f(\frac{5}{3}) = \frac{50}{27} \cdot \end{array}$$

Ușor se observă că pentru existența numerelor $a, b, c \in \mathbb{R}$, care să satisfacă condițiile problemei este necesar și suficient să aibă loc condiția

$$f_{\min} \leq r \leq f_{\max}.$$

Prin urmare

$$\frac{50}{27} \leq r \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{86}{9} \leq s = 3r + 4 \leq 10.$$

11.8. *Fie șirul* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\ cifre}\underbrace{88\ldots8}_{n\ cifre}$, $\forall n \geq 1$. *Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a_n}\right\}$, *unde* $\{t\}$ *reprezintă partea fracționară a numărului* t.

Soluție.

Fie $b_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\ cifre}$ *și* $c_n = 3b_n$, $\forall n \geq 1$. Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$. Avem

$$a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\ cifre}\underbrace{88\ldots8}_{n\ cifre} = \underbrace{11\ldots1}_{n\ cifre}\underbrace{00\ldots0}_{n\ cifre} + \underbrace{88\ldots8}_{n\ cifre} = b_n \cdot 10^n + 8 \cdot b_n = b_n(10^n + 8) =$$

$$= b_n(10^n - 1 + 9) = b_n(9b_n + 9) = 3b_n(3b_n + 3) = c_n(c_n + 3),\ \forall n \geq 1,$$

de unde rezultă că $\left(\sqrt{a_n}\right)^2 = a_n = c_n(c_n + 3) = c_n^2 + 3c_n < c_n^2 + 4c_n + 4 = (c_n + 2)^2$ și

$\left(\sqrt{a_n}\right)^2 = a_n = c_n(c_n + 3) = c_n^2 + 3c_n = c_n^2 + 2c_n + c_n > c_n^2 + 2c_n + 1 = (c_n + 1)^2$, $\forall n \geq 1$,

adică $c_n + 1 < \sqrt{a_n} < c_n + 2$, $\forall n \geq 1$, ceea ce implică $\left[\sqrt{a_n}\right] = c_n + 1$, $\forall n \geq 1$. Obținem

$$\left\{\sqrt{a_n}\right\} = \sqrt{a_n} - \left[\sqrt{a_n}\right] = \sqrt{c_n(c_n + 3)} - (c_n + 1) = \frac{\left(\sqrt{c_n(c_n + 3)} - (c_n + 1)\right)\left(\sqrt{c_n(c_n + 3)} + (c_n + 1)\right)}{\sqrt{c_n(c_n + 3)} + (c_n + 1)} =$$

$$= \frac{c_n(c_n + 3) - (c_n + 1)^2}{\sqrt{c_n(c_n + 3)} + (c_n + 1)} = \frac{c_n - 1}{\sqrt{c_n(c_n + 3)} + (c_n + 1)} = \frac{1 - \frac{1}{c_n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{c_n}} + 1 + \frac{1}{c_n}} \to \frac{1 - 0}{\sqrt{1 + 0} + 1 + 0} = \frac{1}{2}\ (n \to \infty).$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a_n}\right\} = \frac{1}{2}$.