Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 2 martie 2019, Clasa a XI–a

11.1. *Determinați valorile de extrem ale funcției* $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sin x+\cos x+tgx+ctgx.$$

11.2. *Calculați limita* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{2+3+\ldots+n}\right)\right)$.

11. 3. *Determinați toate fincțiile continue* $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, *care verifică relația*

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{y}-\frac{f(y)}{x},\quad \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*.$$

11.4. *În pocal, secțiunea axială a căruia este graficul funcției* $y=x^4$, *se pune o ”vișină” – bilă de rază* R. *Pentru care valori ale lui* R *bila atinge fundului pocalului (punctul* $(0,0)$ *)?*

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !

Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 2 martie 2019, Clasa a XI–a

11.1. *Determinați valorile de extrem ale funcției* $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sin x+\cos x+tgx+ctgx.$$

11.2. *Calculați limita* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{2+3+\ldots+n}\right)\right)$.

11. 3. *Determinați toate fincțiile continue* $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, *care verifică relația*

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{y}-\frac{f(y)}{x},\quad \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*.$$

11.4. *În pocal, secțiunea axială a căruia este graficul funcției* $y=x^4$, *se pune o ”vișină” – bilă de rază* R. *Pentru care valori ale lui* R *bila atinge fundului pocalului (punctul* $(0,0)$ *)?*

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !

Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 3 martie 2019, Clasa a XI–a

11.5. *Comparați numerele* $X = 2019^{\log_{2018} 2017}$ *și* $Y = 2017^{\log_{2019} 2020}$.

11.6. *O sferă trece prin toate vârfurile unei fețe a cubului și este tangentă la toate muchiile feței opuse a cubului. Găsiți raportul dintre volumul sferei și volumul cubului.*

11.7. *Să se arate că dacă numerele reale* a, b, c *satisfac relațiile*

$$a+b+c=4,$$
$$a^2+b^2+c^2=6,$$

atunci

$$\frac{86}{9} \le a^3+b^3+c^3 \le 10.$$

11.8. *Fie șirul* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\ cifre}\underbrace{88\ldots8}_{n\ cifre}$, $\forall n \ge 1$. *Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\sqrt{a_n}\right\}$, *unde* $\{t\}$ *reprezintă partea fracționară a numărului* t.

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES !**

Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 3 martie 2019, Clasa a XI–a

11.5. *Comparați numerele* $X = 2019^{\log_{2018} 2017}$ *și* $Y = 2017^{\log_{2019} 2020}$.

11.6. *O sferă trece prin toate vârfurile unei fețe a cubului și este tangentă la toate muchiile feței opuse a cubului. Găsiți raportul dintre volumul sferei și volumul cubului.*

11.7. *Să se arate că dacă numerele reale* a, b, c *satisfac relațiile*

$$a+b+c=4,$$
$$a^2+b^2+c^2=6,$$

atunci

$$\frac{86}{9} \le a^3+b^3+c^3 \le 10.$$

11.8. *Fie șirul* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\ cifre}\underbrace{88\ldots8}_{n\ cifre}$, $\forall n \ge 1$. *Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\sqrt{a_n}\right\}$, *unde* $\{t\}$ *reprezintă partea fracționară a numărului* t.

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES !**