Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 2 martie 2019, Clasa a XII–a
Barem de evaluare

12.1. Calculați: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\,dx.$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$I=\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx=\int\limits_0^{\ln 2} \frac{(e^x-e^{-x})[(e^x+e^{-x})^2-1]}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$	2 puncte
2.	$\sqrt{e^x+e^{-x}}=t$ $e^x+e^{-x}=t^2$ $(e^x-e^{-x})dx=2tdt$ $x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}$ $x=\ln 2\Rightarrow t=\frac{1}{2}\sqrt{10}$	3 puncte
3.	$I=2\int\limits_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{10}}(t^4-1)\,dt$	1 punct
4.	$I=2\left(\frac{t^5}{5}-t\right)\Big\vert_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}+8\sqrt{2}}{20}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.2. Un plan, care conține o muchie, divizează un tetraedru regulat în două corpuri, volumele cărora se raportă ca 3:5. Determinați măsurile unghiurilor în care planul secant divizează unghiul diedru al tetraedrului.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Obținerea $AK=\frac{5}{8}a$, $BK=\frac{3}{8}a$, unde a este lungimea muchiei tetraedrului, iar K este punctul de intersecție a muchiei AB cu planul secant	1 punct
2	$AM=BM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, unde $M\in CV$, astfel încât AMB - unghiul liniar al unghiului diedru	2 puncte

3	$$KM = \frac{a\sqrt{33}}{8}$$	1 punct
4	$$\cos m(\angle AMK) = \frac{7\sqrt{11}}{33}$$	1 punct
5	$$\cos m(\angle BMK) = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$	1 punct
6	Obținerea lui $\arccos\frac{7\sqrt{11}}{33}$ și $\arccos\frac{3\sqrt{11}}{11}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.3. Arătați că toate soluțiile ecuației $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{2019} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$ sunt reale și determinați aceste soluții.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	$$\left\|\frac{1+iz}{1-iz}\right\|^{2019} = \left\|\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right\| = 1$$	1 punct
2	$\|1+iz\| = \|1-iz\| \Leftrightarrow \|1+iz\|^2 = \|1-iz\|^2 \Leftrightarrow (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z}) \Leftrightarrow$ $1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \Leftrightarrow 2i\bar{z} = 2iz \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.	2 puncte
3	$$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$	1 punct
4	$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{2019} = \left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}\right)^{2019} = \cos(4038\theta) + i\sin(4038\theta),$$ unde $z = \mathrm{tg}\theta,\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	1 punct
5	Obținerea $4038\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	1 punct
6	Obținerea $z \in \left\{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6057} + \frac{k\pi}{2019}\right), k \in \mathbb{Z}, -1009 \leq k \leq 1009\right\}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.4. Fie A o matrice pătratică de ordinul n, elementele căreia sunt numerele -2019 sau 2019. Determinați valoarea maximă a determinantului matricei A, pentru: **a)** $n = 3$; **b)** $n = 4$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	**a)** $\det A = 2019^n \det B$, unde B este o matrice pătratică de ordinul n, care are ca elemente numerele -1 sau 1	1 punct

2	Obținerea că pentru $n = 3,\ det\, B \vdots 4$	2 punct
3	Prezentarea unui exemplu de matrice B, astfel încât $\det B = 4$ și concluzia că valoarea maximă a determinantului matricei B este egală cu 4, iar valoarea maximă a determinantului matricei A este egală cu $4 \cdot 2019^3$.	1 punct
4	**b)** Obținerea că pentru $n = 4, \det B \vdots 8$.	1 punct
5	Obținerea că $\det B \leq 16$	1 punct
6	Prezentarea unui exemplu de matrice B, astfel încât $\det B = 16$ și concluzia că valoarea maximă a determinantului matricei B este egală cu 16, iar valoarea maximă a determinantului matricei A este egală cu $4 \cdot 2019^3$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*