Республиканская Олимпиада по Математике
Первый день, 2 марта 2019 года, XII-й класс
Схема оценивания

12.1. Вычислите: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\,dx.$		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	$I=\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx=\int\limits_0^{\ln 2} \frac{(e^x-e^{-x})[(e^x+e^{-x})^2-1]}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$	2 балла
2	$\sqrt{e^x+e^{-x}}=t$ $e^x+e^{-x}=t^2$ $(e^x-e^{-x})dx=2tdt$ $x=0 \Rightarrow t=\sqrt{2}$ $x=\ln 2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}\sqrt{10}$	3 балла
3	$I=2\int\limits_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{10}} (t^4-1)\,dt$	1 балл
4	$I=2\left(\frac{t^5}{5}-t\right)\Big\|_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}+8\sqrt{2}}{20}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.2. Плоскость, содержащая одно из ребер правильного тетраэдра, делит его объем в отношении 3:5. Найдите величины углов, на которые эта плоскость делит двугранный угол тетраэдра.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Получение $AK=\frac{5}{8}a,\ BK=\frac{3}{8}a$,где a - длина ребра тетраэдра, а K - точка пересечения ребра AB с секущей плоскостью	1 балл
2	$AM=BM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, где $M\in CV$ и AMB – линейный угол двугранного угла	2 балла
3	$KM=\frac{a\sqrt{33}}{8}$	1 балл

4	$\cos m(\angle AMK) = \dfrac{7\sqrt{11}}{33}$	1 балл
5	$\cos m(\angle BMK) = \dfrac{3\sqrt{11}}{11}$	1 балл
	Получение $\arccos\frac{7\sqrt{11}}{33}$ и $\arccos\frac{3\sqrt{11}}{11}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.3. Покажите, что все решения уравнения $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{2019} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$ действительны и найдите эти решения.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	$\left\|\frac{1+iz}{1-iz}\right\|^{2019} = \left\|\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right\| = 1$	1 балл
2	$\|1+iz\| = \|1-iz\| \Leftrightarrow \|1+iz\|^2 = \|1-iz\|^2 \Leftrightarrow (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z}) \Leftrightarrow$ $1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \Leftrightarrow 2i\bar{z} = 2iz \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.	2 балла
3	$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i} = \cos\frac{2\pi}{3} + \ i\sin\frac{2\pi}{3}$	1 балл
4	$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{2019} = \left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}\right)^{2019} = \cos(4038\theta) + i\sin(4038\theta)$, где $z = \mathrm{tg}\theta,\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	1 балл
5	Получение $4038\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	1 балл
6	Получение $z \in \left\{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6057} + \frac{k\pi}{2019}\right), k \in \mathbb{Z}, -1009 \le k \le 1009\right\}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.4. Пусть A квадратная матрица n - го порядка, элементы которой есть числа -2019 или 2019. Найдите максимальное значение определителя матрицы A, при: **a)** $n = 3$; **b)** $n = 4$.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
	a) $\det A = 2019^n \det B$, где B квадратная матрица n - го порядка, элементы	1 балл

1	которой есть числа -1 или 1	
2	Получение при $n = 3,\ det\,B \vdots 4$	2 балла
3	Представление примера матрицы B, для которой $\det B = 4$ и вывод, что максимальное значение определителя матрицы B равно 4, а максимальное значение определителя матрицы A равно $4 \cdot 2019^3$.	1 балл
4	**b)** Получение при $n = 4, \det B \vdots 8$.	1 балл
5	Получение $\det B \leq 16$	1 балл
6	Представление примера матрицы B, для которой $\det B = 16$ и вывод, что максимальное значение определителя матрицы B равно 16, а максимальное значение определителя матрицы A равно $16 \cdot 2019^3$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*