Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 2 martie 2019, Clasa a XII–a

Soluții

12.1. Calculați: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx.$

Soluție:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x-e^{-x})[(e^x+e^{-x})^2-1]}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx = \left|\begin{array}{c} \sqrt{e^x+e^{-x}}=t \\ e^x+e^{-x}=t^2 \\ (e^x-e^{-x})dx=2tdt \\ x=0 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\ln 2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}\sqrt{10} \end{array}\right| =$$

$$= 2\int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{10}} (t^4-1)\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5}-t\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}+8\sqrt{2}}{20}.$$

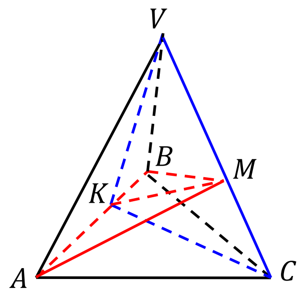
12.2. Un plan, care conține o muchie, divizează un tetraedru regulat în două corpuri, volumele cărora se raportă ca 3:5. Determinați măsurile unghiurilor în care planul secant divizează unghiul diedru al tetraedrului.

Soluție:

Fie a lungimea muchiei tetraedrului, iar VKC - planul secant.

Considerăm că $\frac{V_{VKCB}}{V_{VKCA}} = \frac{3}{5}$. Atunci $\frac{BK}{AK} = \frac{3}{5}$ și $AK = \frac{5}{8}a,\ BK = \frac{3}{8}a.$

Considerăm unghiul liniar AMB al unghiului diedru. Atunci $AM = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Aplicăm teorema cosinusurilor în triunghiul ACK și obținem $CK^2 = AK^2 + AC^2 - AK \cdot AC$, ceea ce implică $CK = \frac{7}{8}a$. Deoarece $CV \perp (AMB)$, obținem că $KM \perp CV$, ceea ce implică $KM^2 = CK^2 - CM^2$ sau $KM = \frac{a\sqrt{33}}{8}$.



Aplicăm teorema cosinusurilor în triunghiul AMK și obținem

$AK^2 = AM^2 + KM^2 - 2AM \cdot KM \cos m(\angle AMK)$, ceea ce implică $\cos m(\angle AMK) = \frac{7\sqrt{11}}{33}$.

Aplicăm teorema cosinusurilor în triunghiul BMK și obținem

$BK^2 = BM^2 + KM^2 - 2BM \cdot KM \cos m(\angle BMK)$, ceea ce implică $\cos m(\angle BMK) = \frac{3\sqrt{11}}{11}$.

Astfel, am obținut că planul secant divizează unghiul diedru al tetraedrului în unghiuri de $\arccos\frac{7\sqrt{11}}{33}$ și $\arccos\frac{3\sqrt{11}}{11}$.

12.3. Arătați că toate soluțiile ecuației $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{2019} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$ sunt reale și determinați aceste soluții.

Soluție:

Observăm că $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^{2019} = \left|\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right| = 1.$

Atunci $|1+iz| = |1-iz| \Leftrightarrow |1+iz|^2 = |1-iz|^2 \Leftrightarrow (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z}) \Leftrightarrow$

$$1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \Leftrightarrow 2i\bar{z} = 2iz \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Fie $z = \mathrm{tg}\theta,\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{2019} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i} \Leftrightarrow \left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}\right)^{2019} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos(4038\theta) + i\sin(4038\theta) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 4038\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6057} + \frac{k\pi}{2019}, k \in \mathbb{Z}.$$

Atunci $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ implică $z \in \left\{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6057} + \frac{k\pi}{2019}\right), k \in \mathbb{Z}, -1009 \le k \le 1009\right\}$.

12.4. Fie A o matrice pătratică de ordinul n, elementele căreia sunt numerele -2019 sau 2019.

Determinați valoarea maximă a determinantului matricei A, pentru: **a)** $n = 3$; **b)** $n = 4$.

Soluție:

a) Observăm că $A = 2019 \cdot B$, unde B este o matrice pătratică de ordinul n, care are ca elemente numerele -1 sau 1. Atunci $\det A = 2019^n \det B$. Fie $n = 3$. Adunăm elementele liniei a doua a matricei B cu elementele respective ale primei linii. Adunăm elementele liniei a treia a matricei B cu elementele respective ale primei linii. Obținem o matrice care are ca elemente ale liniilor a doua și a treia numerele $-2, 0$ sau 2, ceea ce implică $\det B \,\vdots\, 4$. Ținând cont de faptul că $|\det B| \le 6$ și de existența, de exemplu a matricei $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, încât $\det B = 4$ concluzionăm că valoarea maximă a determinantului matricei B este egală cu 4 și valoarea maximă a determinantului matricei A este egală cu $4 \cdot 2019^3$.

b) Prin raționamente similare celor din a) obținem că pentru $n = 4, \det B \,\vdots\, 8$.

Întrucât valoarea maximă a determinantului unei matrice pătratice B de ordinul 3 cu proprietățile menționate, este egală cu 4, calculând valoarea determinantului unei matrice pătratice B de ordinul 4 prin metoda dezvoltării ei după o linie sau coloană, obținem că $\det B \le 16$.

Existența, de exemplu, a matricei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, încât $\det B = 16$, implică valoarea maximă a determinantului matricei B egală cu 16, iar valoarea maximă a determinantului matricei A egală cu $16 \cdot 2019^4$.