Olimpiada Republicană la Matematică

Ziua a doua, 3 martie 2019, Clasa a XII–a

Barem de evaluare

12.5. Fie funcția continuă $f:(0;\ +\infty)\to\mathbb{R}$, pentru care $(x+1)f(x)+\frac{1}{x^3}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+1}{x(x^2+1)}$. Determinați primitivele $F:(0;\ +\infty)\to\mathbb{R}$ ale funcției f.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea sistemului $\begin{cases}(x+1)f(x)+\frac{1}{x^3}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+1}{x(x^2+1)}\\ x^3f(x)+\frac{x+1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(2+x)x^2}{x^2+1}\end{cases}$	2 puncte
2.	Rezolvarea sistemului $\begin{cases}(x+1)f(x)+\frac{1}{x^3}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+1}{x(x^2+1)}\\ x^3f(x)+\frac{x+1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(2+x)x^2}{x^2+1}\end{cases}$	2 puncte
3.	$F(x)=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C, C\in\mathbb{R}$	3 puncte
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.6. Determinați valoarea minimă a modulului numărului complex z, care verifică relația

$$|z+12|+|z-5i|=13.$$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Dacă $P(a_1\,, b_1)$ este imaginea numărului complex $z_1=a_1+b_1i$, iar $Q(a_2\,, b_2)$ - imaginea numărului complex $z_2=a_2+b_2i$, atunci $\|z_1-z_2\|=PQ$.	2 puncte
2	$\|z+12\|+\|z-5i\|=13 \Leftrightarrow AM+AN=MN \Rightarrow A\in[MN]$, unde M imaginea lui $z_1=-12$, N imaginea lui $z_2=5i$ și A imaginea lui z	2 puncte
3	Valoarea minimă a lungimii segmentului $OA, OA=\|z\|$, este distanța de la originea de coordonate la dreapta MN	2 puncte
4	Obținerea valorii $\frac{60}{13}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.7. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, înălțimea are lungimea h și este diametru al unei sfere, iar $m(\angle AVB) = \varphi$. Determinați lungimea curbei obținute la intersecția sferei cu suprafața laterală a piramidei.

	Etape ale rezolvării cu barem de evaluare	
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	$a = 2VA\sin\frac{\varphi}{2}$, unde $AB = a$	1 punct
2	$a = \dfrac{2\,h\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi}}, VA = \dfrac{h}{\sqrt{\cos\varphi}}$	1 punct
3	$VM = h\sqrt{\cos\varphi}$	1 punct
4	$R = \dfrac{h\sqrt{\cos\varphi}}{2\cos\dfrac{\varphi}{2}},$ unde R este raza cercului, obținut la intersecția sferei cu fața BVA	2 puncte
5	$l_{MN} = 2\varphi R = \dfrac{h\varphi\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}},$ unde MN este arcul obținut la intersecția feței BVA cu sfera	1 punct
6	$l = \dfrac{4h\varphi\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.8. Fie $I_n = n\int_0^1 \frac{\cos x}{1+e^{nx}}\,dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

	Etape ale rezolvării cu barem de evaluare	
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	$I_n = n\int\limits_0^1 \dfrac{\cos x}{1+e^{nx}}\,dx = n\int\limits_0^1 \cos x\,\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx = -\cos x\cdot\ln(1+e^{-nx})\vert_0^1 - -\int\limits_0^1 \sin x\ln(1+e^{-nx})\,dx = = -\cos 1\cdot\ln(1+e^{-n}) + \ln 2 - \int\limits_0^1 \sin x\ln(1+e^{-nx})\,dx.$	2 puncte
2	$0 < \ln(1+e^{-nx}) < e^{-nx}$	1 punct
3	$0 \le \int\limits_0^1 \sin x\ln(1+e^{-nx})\,dx \le \int\limits_0^1 e^{-nx}\sin x\,dx \le \int\limits_0^1 e^{-nx}\,dx = \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{e^n}\right)$	2 puncte

4	$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sin x \ln(1+e^{-nx})\, dx = 0$$	1 punct
5	$\lim_{n\to\infty} I_n = \ln 2.$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*