Республиканская Олимпиада по Математике
Второй день, 3 марта 2019 года, XII-й класс

Схема оценивания

12.5. Пусть $f:(0;\ +\infty) \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию $(x+1)f(x)+\frac{1}{x^3}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+1}{x(x^2+1)}$. Найдите первообразные $F:(0;\ +\infty) \to \mathbb{R}$ функции f.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Получение системы $\begin{cases}(x+1)f(x)+\frac{1}{x^3}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+1}{x(x^2+1)}\\ x^3f(x)+\frac{x+1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(2+x)x^2}{x^2+1}\end{cases}$	2 балла
2	Решение системы $\begin{cases}(x+1)f(x)+\frac{1}{x^3}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+1}{x(x^2+1)}\\ x^3f(x)+\frac{x+1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(2+x)x^2}{x^2+1}\end{cases}$	2 балла
3	$F(x)=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C, C\in\mathbb{R}$	3 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.6. Найдите минимальное значение модуля комплексного числа z, для которого $$\lvert z+12\rvert+\lvert z-5i\rvert=13.$$		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Если $P(a_1\ ,b_1)$ - изображение комплексного числа $z_1=a_1+b_1i$, а $Q(a_2\ ,b_2)$ - изображение комплексного числа $z_2=a_2+b_2i$, тогда $\lvert z_1-z_2\rvert=PQ$.	2 балла
2	$\lvert z+12\rvert+\lvert z-5i\rvert=13 \Leftrightarrow AM+AN=MN \Rightarrow A\in[MN]$, где M изображение $z_1=-12$, N изображение $z_2=5i$ и A изображение z	2 балла
3	Минимальное значение длины отрезка $OA, OA=\lvert z\rvert$, есть расстояние от начала координат до прямой MN	2 балла
4	Получение значения $\frac{60}{13}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.7. В правильной четырёхугольной пирамиде $VABCD$, высота имеет длину h и служит диаметром шара, а $m(\angle AVB)=\varphi$. Найдите длину кривой пересечения поверхности шара и боковой поверхности пирамиды.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	$a = 2VA\sin\frac{\varphi}{2}$, где $AB = a$	1 балл
2	$a = \dfrac{2\,h\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi}}, VA = \dfrac{h}{\sqrt{\cos\varphi}}$	1 балл
3	$VM = h\sqrt{\cos\varphi}$	1 балл
4	$R = \dfrac{h\sqrt{\cos\varphi}}{2\cos\dfrac{\varphi}{2}}$, где R - радиус окружности, полученной на пересечении шара с гранью BVA	2 балла
5	$l_{MN} = 2\varphi R = \dfrac{h\varphi\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}$, где MN – дуга, полученная на пресечении шара с гранью BVA	1 балл
6	$l = \dfrac{4h\varphi\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.8. Пусть $I_n = n\int_0^1 \frac{\cos x}{1+e^{nx}}dx$, где $n \in \mathbb{N}^*$. Вычислите: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	$I_n = n\int\limits_0^1 \dfrac{\cos x}{1+e^{nx}}dx = n\int\limits_0^1 \cos x\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-nx}}dx = -\cos x \cdot \ln(1+e^{-nx})\|_0^1 - -\int\limits_0^1 \sin x\ln(1+e^{-nx})\,dx = = -\cos 1 \cdot \ln(1+e^{-n}) + \ln 2 - \int\limits_0^1 \sin x\ln(1+e^{-nx})\,dx.$	2 балла
2	$0 < \ln(1+e^{-nx}) < e^{-nx}$	1 балл

3	$0 \le \int_0^1 \sin x \ln(1+e^{-nx})\,dx \le \int_0^1 e^{-nx}\sin x\,dx \le \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$	2 балла
4	$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sin x \ln(1+e^{-nx})\,dx = 0$	1 балл
5	$\lim_{n\to\infty} I_n = \ln 2.$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*