Olimpiada Republicană la Matematică
Ziua a doua, 3 martie 2019, Clasa a XII–a

Soluții

12.5. Fie funcția continuă $f: (0;\ +\infty) \to \mathbb{R}$, pentru care $(x+1)f(x) + \frac{1}{x^3} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{x(x^2+1)}$.

Determinați primitivele $F: (0;\ +\infty) \to \mathbb{R}$ ale funcției f.

Soluție:

Notăm prin $t = \frac{1}{x}$ și obținem $t^3 f(t) + \frac{t+1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{(2+t)t^2}{t^2+1}$.

Pentru a determina funcția f, rezolvăm sistemul $\begin{cases} (x+1)f(x) + \frac{1}{x^3} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{x(x^2+1)} \\ x^3 f(x) + \frac{x+1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(2+x)x^2}{x^2+1} \end{cases}$.

Obținem $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$.

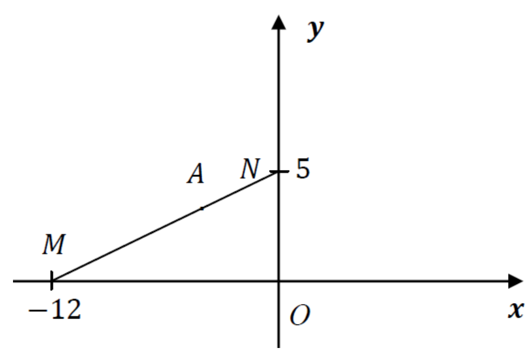
Întrucât $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x^3(1+x^{-2})} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^{-2})}{1+x^{-2}} = -\frac{1}{2} \ln(1+x^{-2}) + C = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$,
obținem $F: (0;\ +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C, C \in \mathbb{R}$.

12.6. Determinați valoarea minimă a modulului numărului complex z, care verifică relația

$$|z+12| + |z-5i| = 13.$$

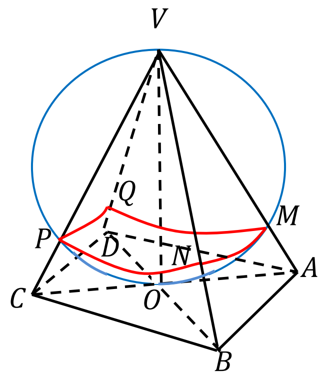
Soluție:

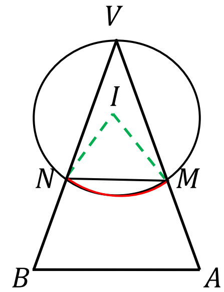
Dacă $P(a_1, b_1)$ este imaginea numărului complex $z_1 = a_1 + b_1 i$, iar $Q(a_2, b_2)$ - imaginea numărului complex $z_2 = a_2 + b_2 i$, atunci $|z_1 - z_2| = PQ$.
Fie M imaginea lui $z_1 = -12$, N imaginea lui $z_2 = 5i$ și A imaginea lui z. Atunci $|z+12| = AM, |z-5i| = AN$, $13 = MN$. Atunci $|z+12| + |z-5i| = 13 \Leftrightarrow AM + AN = MN \Rightarrow A \in [MN]$. Valoarea minimă a lungimii segmentului $OA, OA = |z|$, este distanța de la punctul O la dreapta MN și este egală cu $\frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13}$.

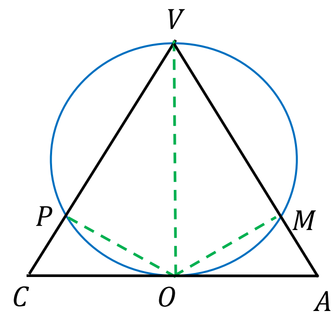


12.7. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, înălțimea are lungimea h și este diametru al unei sfere, iar $m(\angle AVB) = \varphi$. Determinați lungimea curbei obținute la intersecția sferei cu suprafața laterală a piramidei.

Soluție:







Curba obținută la intersecția sferei cu suprafața laterală a piramidei constă din 4 arce congruente ale cercurilor, obținute la intersecția fețelor laterale cu sfera.

Determinăm lungimea arcului NM de cerc cu centrul în punctul I, obținut la intersecția sferei cu planul BVA.

Fie $AB = a$. Atunci $a = 2VA\sin\frac{\varphi}{2}, AC = a\sqrt{2},\ OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

În triunghiul VOA, dreptunghic în O, obținem $h^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}$, ceea ce implică $a = \frac{2h\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi}}$ și $VA = \frac{h}{\sqrt{\cos\varphi}}$.

Aplicăm teorema catetei în triunghiul VOA și obținem $VO^2 = VM \cdot VA$, ceea ce implică $VM = h\sqrt{\cos\varphi}$.

Fie $MI = R$, atunci în triunghiul VMN obținem $2MI = 2R = \frac{VM}{\sin\left(90°-\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{VM}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{h\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{2}}$, ceea ce implică $R = \frac{h\sqrt{\cos\varphi}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$. Deoarece $m(\angle MIN) = 2\varphi$, obținem că lungimea arcului MN este $l_{MN} = 2\varphi R = \frac{h\varphi\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{2}}$, iar lungimea curbei obținute la intersecția sferei cu suprafața laterală a piramidei este $l = \frac{4h\varphi\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{2}}$.

12.8. Fie $I_n = n\int_0^1 \frac{\cos x}{1+e^{nx}}dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Soluție:

Utilizăm metoda integrării prin părți și obținem

$$I_n = n\int_0^1 \frac{\cos x}{1+e^{nx}}dx = n\int_0^1 \cos x\frac{e^{-nx}}{1+e^{-nx}}dx = -\cos x \cdot \ln(1+e^{-nx})|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \sin x\ln(1+e^{-nx})\,dx = -\cos 1 \cdot \ln(1+e^{-n}) + \ln 2 - \int_0^1 \sin x\ln(1+e^{-nx})\,dx.$$

Întrucât $0 < \ln(1+e^{-nx}) < e^{-nx}$ obținem

$$0 \le \int_0^1 \sin x\ln(1+e^{-nx})\,dx \le \int_0^1 e^{-nx}\sin x\,dx \le \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right).$$

Trecem la limită în ultima inegalitate dublă și obținem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sin x \ln(1 + e^{-nx})\, dx = 0.$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \ln(1 + e^{-n}) = 0$, obținem $\lim_{n\to\infty} I_n = \ln 2$.